Adam Olszewski

O nieusuwalności podmiotu matematycznego

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 46, 100-117

2010

Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLVI (2010), 100–117

Adam Olszewski
Wydział Filozoficzny, Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie

O NIEUSUWALNOŚCI PODMIOTU MATEMATYCZNEGO

Jak się zdaje po okresie dominacji syntaktyki i semantyki w badaniach nad językiem, szczególnie językami formalnymi, przyszedł czas rozwijania pragmatyki. Pragmatyka powstaje w momencie, kiedy do rozważań semantycznych dołączymy użytkownika języka, zwanego dalej Podmiotem. Zadaniem tego artykułu jest argumentacja za tym, że Podmiot Matematyczny jest konieczny do rozważań z zakresu filozofii matematyki. Pośrednio argumentuję również za tym, że krytyka psychologizmu dokonana przez wielkich filozofów jak np. Fregego czy Husserla powinna stać się przedmiotem ponownej debaty filozoficznej.

1. DEFINICJE I WYJAŚNIENIA TERMINÓW

Zacznijmy od rozjaśnienia terminu „nieusuwalność”, występującego w tytule artykułu. W logice znana jest definicja tzw. konserwatywnego rozszerzenia teorii. Teoria T_1 jest konserwatywnym rozszerzeniem teorii T; język teorii T_1 jest rozszerzeniem języka teorii T; każde twierdzenie teorii T_1 w języku teorii T jest twierdzeniem T oraz każde twierdzenie teorii T jest twierdzeniem teorii T_1. Definicja ta ma naprowadzić naszą intuicję na właściwe tory. Przez analogię stworzymy pojęcie rozszerzenia teorii w nieformalnym sensie. Obecnie przez nieformalną teorię rozumieć będziemy na przykład filozofię matematyki i nazywać FM[1]. Można ją sobie wyobrażać również jako zbiór zdań. Załóżmy, że rozszerzamy język FM w ten sposób, że dołączamy nowe pojęcie (pierwotne)[2] i formułujemy zdania z jego użyciem[3]. Tą rozszerzoną teorię nazwiemy FM_1. Powiemy, że jakiś termin teorii FM_1 jest *nieusuwalny* z FM_1, jeśli w teorii FM_1 można wyjaśnić lub nawet dobrze sformułować jakiś ważny problem wyrażony w języku teorii FM. Wspomniana analogia z *konserwatywnym rozszerzeniem* teorii polega na tym, że w rozważanym przypadku właśnie FM_1 nie jest konserwatywnym rozszerzeniem teorii FM. Główna teza mojego artykułu jest taka, że pojęcie Podmiotu Matematycznego jest *nieusuwalne* z filozofii matematyki.

2. PRZYKŁADY WSKAZUJĄCE NA NIEUSUWALNOŚĆ PODMIOTU

Zatem na mocy powyższego ustalenia wystarczy znaleźć *ważny*[4] problem filozofii matematyki (rozumianej szeroko), którego ona nie jest w stanie rozwiązać bez pojęcia *Podmiotu Matematycznego*.

2.1. MODEL ZAMIERZONY

Logicy i matematycy często posługują się pojęciem *modelu zamierzonego*. Jest tak szczególnie w odniesieniu do arytmetyki Peana (PA) pierwszego rzędu, dla której obowiązują: twierdzenie Gödla o niezupeł-

[1]Tutaj rozumiem filozofię matematyki szeroko i zakładam, że filozofia logiki jest jej częścią.

[2]„Pojęcia pierwotne" to składnik żargonu filozoficzno-matematycznego. Raczej należałoby powiedzieć „termin niezdefiniowany".

[3]Wydaje się, że nie powinno to być pojęcie zdefiniowane, gdyż można je wyeliminować, na co zwrócił uwagę J. Dadaczyński. Jednak nie jest to całkiem oczywiste. Może być bowiem tak, że pojęcie definiowalne pozwala na jakiś szczególny wgląd w zamierzone uniwersum teorii.

[4]Który problem jest *ważny* dla danej dyscypliny, a który nie jest ważny, ustalają specjaliści z tej dziedziny. Oczywiście zasadność powyższych rozważań zależeć będzie od uznania przez specjalistów czy podane przykłady dotyczą *ważnych* problemów.

ności oraz twierdzenia Skolema-Löwenheima[5]. Termin ten jest w użyciu ze względu na istnienie nieizomorficznych modeli, różnych od modelu zamierzonego arytmetyki PA. Te inne modele zwane są *modelami niestandardowymi*. Quinon i Zdanowski (w [Quinon]) odróżniają model standardowy od zamierzonego. Według nich klasa modeli zamierzonych jest podklasą właściwą klasy modeli standardowych. Dzieje się tak z powodu wymogu rekurencyjności nałożonego na relację izomorfizmu. Uważają, że pojęcia modelu standardowego i niestandardowego są dobrze zdefiniowane metamatematycznie.

Przyjrzyjmy się jak sprawa się rzeczywiście przedstawia. Otóż na przykład Grzegorczyk (w [Grzegorczyk, 258]) podaje następującą definicję modelu standardowego: model $N_0 =< N, 0, 1, + >$ i każdy model z nim izomorficzny nazywamy modelem standardowym. Natomiast klasyczny podręcznik z teorii modeli nazywa modelem standardowym strukturę $M =< \omega, +, \cdot, S, 0 >$, gdzie $+$, $\cdot$, S oraz 0 mają swoje zwykłe znaczenie (por. [Chang, 42]). Jeszcze inaczej sprawę traktuje Hodges (w [Hodges, 32–33]), który uważa, że dla arytmetyki Peana pierwszego rzędu model standardowy to model zamierzony, a wszystkie inne nieizomorficzne modele nazywa niestandardowymi. Mamy zatem do czynienia z pewnym galimatiasem terminologicznym i nie jest tak, jak piszą Quinon i Zdanowski, że sprawa jest od strony definicyjnej całkiem jasna. Opisana sytuacja rzeczywiście nie powoduje niejasności, bo terminy są zdefiniowane precyzyjnie, a definicje mają charakter syntetyczny[6]. Co jest tutaj istotne to to, że jest problem z odróżnieniem modelu standardowego od zamierzonego. Model standardowy może być scharakteryzowany ostensywnie — przez wskazanie. Natomiast modelu zamierzonego nie wystarczy wskazać. Przysługuje mu bowiem cecha *bycia zamierzonym*, a jest to pojęcie epistemiczne (pragmatyczne). Jeśli jeszcze można się upierać, że wyrażenie *standardowy* jest jednoargumentowym predykatem, to już w przypadku wyrażenia *zamierzony* mamy do czy-

[5]Oczywiście twierdzenie Gödla o niezupełności dotyczy znacznie szerszej klasy teorii.

[6]Quinion i Zdanowski piszą, że model jest standardowy jeśli jego uniwersum uporządkowane jest w typ ω.

nienia z predykatem co najmniej dwuargumentowym — *model M jest modelem zamierzonym przez Podmiot P*. Odwołuje się ono do własności Podmiotu. Ciekawy argument za tym podają Quinon i Zdanowski. Biegnie on tak:

- Podstawowe operacje arytmetyczne są obliczalne.
- Psychologiczna wersja Tezy Churcha: Dowolna własność, którą człowiek potrafi obliczać, może być obliczona przez maszynę Turinga.
- Model arytmetyki spełnia aksjomat indukcji.
- Twierdzenie Tennenbauma: Niech M będzie dowolnym modelem arytmetyki Peana. Jeśli interpretacje dodawania i mnożenia w M są rekurencyjne, to M jest standardowym modelem arytmetyki (z porządkiem typu ω).
- Przy powyższych założeniach; model arytmetyki ma uniwersum ω-uporządkowane.

Epistemiczność pojęcia *modelu zamierzonego* zasadza się na odwołaniu do *psychologicznej* wersji Tezy Churcha, która jest wymieniona jako druga przesłanka. Nazywanie tej wersji *psychologiczną* nie jest całkiem właściwe. Ten termin jest wieloznaczny i może powodować kontrowersje. W szczególności może on nawiązywać do wspomnianego sporu Fregego i Husserla z psychologizmem. Przez psychologizm w filozofii matematyki rozumiem pogląd, według którego pojęcia matematyczne wywodzą się z praw psychologicznych. Charakter owego *wywodzenia* może być różny[7]. Wydaje mi się, że spór pomiędzy psychologistami i antypsychologistami polegał na tym, że nie wyodrębniono precyzyjnie dwóch gałęzi nauki o umyśle; z jednej strony psychologii, a z drugiej strony teorii umysłu (kognitywistyki). Jednym z przejawów tej dystynkcji jest odróżnianie *sądów w sensie psychologicznym* od *sądów w sensie logicznym*. Ciekawe jest tutaj to, że żadna

[7]Może ono być rozumiane w sensie eksplikacji, pochodzenia czy jeszcze innym.

z wymienionych nauk nie ma charakteru normatywnego (w przeciwieństwie do np. logiki). Obie natomiast mają charakter empiryczny, z tym jednak zastrzeżeniem, że termin *empiryczny* ma różne znaczenia w obydwu przypadkach. W przypadku psychologii empiryczny jej charakter zasadza się na opisie *faktualnych* własności człowieka jako Podmiotu. Dla takiego Podmiotu Teza Churcha jest fałszywa i dlatego uważam, że nazywanie tej wersji Tezy *psychologiczną* jest niewłaściwe. W przypadku nauk o umyśle, empiryczność dotyczy wyidealizowanych możliwości Podmiotu. Idealizacja dotyczy tego, co Podmiot może zrobić *zasadniczo* tzn. pomijając drugorzędne (pokonywalne) ograniczenia takie jak czas, skończoność pamięci czy ograniczoność czasoprzestrzeni. Teza Churcha — podając ograniczenie (górne) na możliwości obliczeniowe Podmiotu — kreuje jego określoną koncepcję. Tak ujęty Podmiot pozwala na nietrywialne wprowadzenie pojęcia *modelu zamierzonego*. Widać to klarownie na podstawie przytoczonego rozumowania. Dla porządku należy wspomnieć, że wartość logiczna Tezy Churcha nie jest rozstrzygnięta. Zatem może być tak, że jest ona fałszywa. Co za tym idzie, możliwości efektywnej obliczalności Podmiotu mogą być większe, a w konsekwencji pojęcie *modelu zamierzonego* szersze. Założenie prawdziwości TC jest niesprzeczne z matematyką klasyczną, choć nie jest w jej obrębie sformułowane precyzyjnie. Natomiast w obrębie matematyki intuicjonistycznej TC ma postać formuły i z wieloma nieklasycznymi aksjomatami tej matematyki jest ona niesprzeczna.

2.2. LEMAT KÖNIGA

Kolejny argument za nieusuwalnością Podmiotu Matematycznego z FM_1 pochodzić będzie z rozważań związanych z lematem Königa. Najpierw przytoczę wersję przeliczalną lematu:

Lemat Königa Dowolne nieskończone drzewo T, które jest skończenie generowalne posiada gałąź nieskończoną[8].

[8]Wersja tego lematu, w której wymaga się żeby drzewo T było binarne, nosi w literaturze nazwę *weak König's lemma* — WKL.

Lemat ten jest prawdziwy w obrębie matematyki klasycznej. Dla zrozumienia o czym on mówi, trzeba podać kilka definicji. Klasycznie samo pojęcie *drzewa* można wprowadzić na kilka sposobów. Można zrobić to wychodząc od pojęcia *grafu* albo od pojęcia *zbioru częściowo uporządkowanego*. Smullyan (w [Smullyan 1995, 3]) wprowadza pojęcie drzewa następująco. *Nieuporządkowane drzewo T* tworzą:

- (1) Zbiór X elementów zwanych *punktami*.
- (2) Funkcja l, która każdemu punktowi x drzewa T przyporządkowuje liczbę naturalną $l(x)$ zwaną *poziomem tego punktu*.
- (3) Relacja R określona w X spełnia warunki:
  (a) istnieje jeden tylko punkt x_1 mający poziom 1 (przodek drzewa);
  (b) każdy punkt drzewa T, różny od przodka, ma tylko jeden bezpośredni poprzednik;
  (c) dla dowolnych punktów x, y, jeśli y jest następnikiem x, to $l(y) = l(x) + 1$.

Nieuporządkowane drzewo T jest *uporządkowane* jeśli istnieje funkcja, która przyporządkowuje każdemu punktowi uporządkowany zbiór jego bezpośrednich następników. Jeśli liczba *bezpośrednich następników* jest równa 0 lub jest skończona, to drzewo nazywa się *skończenie generowalnym*. Liczba naturalna przyporządkowana punktowi końcowemu gałęzi jest *długością* tej gałęzi. Lemat Königa mówi właściwie, że dla dowolnego, *skończenie generowalnego* drzewa, na którym dla każdej liczby naturalnej n, o ile istnieje przynajmniej jedna gałąź o długości n, T musi posiadać gałąź nieskończoną (por. [Smullyan 1995, 31–33]).

Fan Theorem jest intuicjonistycznym odpowiednikiem lematu Königa. Wypowiedzenie go wymaga w obrębie konstruktywnej matematyki sformułowania paru definicji pomocniczych[9]. Niech N będzie

[9]Definicje i sposób ujęcia prezentuję za D. Brigdes “Constructive Mathematics” w: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Tam też znajdują się ciekawe uwagi odnoszące się do rozważanych spraw, szczególnie różnicy pomiędzy matematyką klasyczną a konstruktywistyczną.

zbiorem liczb naturalnych. Symbolem N^* oznaczać będziemy zbiór wszystkich skończonych ciągów elementów zbioru N. Jeśli α jest skończonym ciągiem o postaci $< a_1, a_2, ..., a_n >$ i należy do zbioru N^*, to n nazywana jest *długością* tego ciągu. Symbolem $\bar{\alpha}(m)$ oznacza się skończony ciąg m–pierwszych elementów tego ciągu dla pewnego $m \in N$, gdzie $\alpha \in N^N$ lub $\alpha \in N^*$. Jeśli $\alpha \in N^*$ oraz $\beta = \bar{\alpha}(m)$, dla pewnego m, to α jest nazywana *rozszerzeniem* β i równocześnie β jest *ograniczeniem* ciągu α. Podzbiór X zbioru N nazywa się *odrywalnym* (*detachable*) od N jeśli:

$$\forall n \in N\ (n \in X \ \vee n \notin X).$$

Wachlarzem[10] nazywamy *odrywalny* podzbiór X zbioru N^* jeśli spełnione są warunki:

- X jest zamknięty na *ograniczenia* ciągów;
- dla każdego ciągu α, zbiór $\{\alpha \star n \ : n \ \in N\}$ jest skończony lub pusty (symbol $\alpha \star n$ oznacza ciąg powstający z ciągu α przez dopisanie n do elementów ciągu α).

Teraz kilka definicji pomocniczych:

1. *Ścieżka* (*path*) wachlarza X to ciąg α, skończony lub nieskończony, taki, że $\bar{\alpha}(n) \in X$, dla stosownego n;
2. Ścieżka α jest *zablokowana* przez podzbiór B wachlarza, jeśli istnieje w B pewne *ograniczenie* ciągu α;
3. Ciąg α *opuszcza* (*misses*) zbiór B, jeśli nie istnieje w B żadne *ograniczenie* α;
4. Podzbiór B wachlarza nazywa się *sztabą* (*bar*)[11] dla X, gdy każda nieskończona ścieżka wachlarza X jest *zablokowana* przez B;
5. *Sztaba* B dla X nazywa się *jednorodną* (*uniform*) jeśli istnieje takie $n \in N$, że każda ścieżka o długości n jest *zablokowana* przez B.

[10]Tak tłumaczę na polski termin *fan*.
[11]Tak tłumaczę angielskie słowo *bar*.

Teraz wreszcie można sformułować wersję rozważanego twierdzenia dla *detachable bars*:

Fan Theorem Każda *odrywalna sztaba* wachlarza jest jednorodna.

Ponieważ pojęcie zbioru *odrywalnego* jest klasycznie niepotrzebne (tautologia), jak zauważa Bridges za Dummettem (zob. [Dummett, 69]), powyższe twierdzenie jest przez kontrapozycję równoważne lematowi Königa w postaci:

Lemat Königa Jeśli dla każdego n; istnieje ścieżka o długości n taka, która opuszcza B, to istnieje nieskończona ścieżka, która opuszcza B.

Tak się rzeczy mają, jeśli chodzi o lemat Königa i *Fan Theorem*. Sytuacja jest filozoficznie nieco dziwna. Oto mamy dwa twierdzenia, które klasycznie są równocześnie prawdziwe, ale konstruktywistycznie (intuicjonistycznie) nie są oba prawdziwe[12]. Klasyczny dowód lematu Königa jest bowiem w intuicjonizmie nieakceptowalny, zaś *Fan Theorem* dowodzi się na podstawie tzw. *Bar Theorem* Brouwera[13]. Bridges przestrzega przed uproszczoną diagnozą jakby „intuicjonizm był sprzeczny z matematyką klasyczną". Wprawdzie podane wyżej sformułowanie lematu Königa różni się od klasycznego sformułowania lematu, który podałem wcześniej, jednak różnice te nie są istotne. To co istotne to to, że kontrapozycja lematu w drugiej wersji (*Fan Theorem*) jest twierdzeniem intuicjonistycznym, które jest istotnie inaczej rozumiane od jego klasycznej kontrapozycji. Mamy do czynienia z dwoma różnymi twierdzeniami. Podstawowa różnica polega na pojęciu zbioru *odrywalnego*. Warunek który go definiuje jest klasyczną tautologią rachunku predykatów (wersja prawa wyłączonego środka), natomiast intuicjonistycznie trzeba tego warunku dowodzić.

---

[12] Będę dalej zamiennie używał terminów *matematyka intuicjonistyczna* i *matematyka konstruktywistyczna*, choć nie jest to całkiem poprawne. Ta pierwsza jest szczególnym przypadkiem drugiej.

[13] Brouwer podał argument za *Bar Theorem*, lecz nie jest on powszechnie zaakceptowany. Według niektórych intuicjonistów *Bar Theorem* i *Fan Theorem* są traktowane jako nieklasyczne aksjomaty. Por. [Troelstra, rozdz.4].

W dotychczasowych rozważaniach filozoficznych na temat różnicy pomiędzy matematyką intuicjonistyczną, a klasyczną zwykło się mówić o różnicy logiki. Z punktu widzenia formalnego logika intuicjonistyczna jest podlogiką logiki klasycznej. Filozoficznie jednak nie wyjaśnia to niczego, a nawet wprowadza w błąd, gdyż pozornie filozoficzny problem jest rozwiązany. Uważam, że tak nie jest. Chciałbym przywołać tutaj opinię znanego logika Georga Kreisla, który uważał, że pomiędzy matematyką intuicjonistyczną, a klasyczną nie ma sprzeczności. Dopiero precyzyjniejsze sformułowanie tych pozycji pozwoli dostrzec, że nie są sprzeczne.

Wydaje się zatem, że należy powtórnie przemyśleć problem następujący: czym naprawdę jest logika? Zdaje się, że można mówić o dwóch znaczeniach terminu *logika*. W pierwszym logikę formalnie pojmuje się na przykład jako operator konsekwencji, ale to znaczenie niewiele wnosi interesującego do debaty na temat powyższego problemu (logika2). W drugim znaczeniu logika to jakaś właściwość aktywności Podmiotu (logika1). Bridges pisze: „Aby opisać logikę używaną przez matematyka-intuicjonistę należało wpierw zanalizować matematyczne procesy umysłu, z której to analizy dopiero logika może być wyłoniona” (por. [Brigdes, punkt 3.1]). Zgadzam się z nim całkowicie. Logika2 jest wtórnym tworem względem umysłu, a dokładniej Podmiotu Matematycznego i jego logiki1, czyli reguł owych matematycznych procesów Podmiotu. Mówiąc inaczej logika1 jest *własnością* Podmiotu Matematycznego, zaś logika2 jest zapisem owocu autorefleksji Podmiotu Matematycznego. Inutuicjonistyczny Podmiot Matematyczny różni się od klasycznego właśnie logiką1 i wtórnie logiką2. Własność bycia zbiorem *odrywalnym* jest klasycznie zasadą logiczną, zaś intuicjonistycznie trzeba jej dowieść. W ten sposób Podmioty różnią się logiką1 przede wszystkim. Nieusuwalność Podmiotu Matematycznego zasadza się w tym przypadku na tym, że bez niego nie można dalej analizować rozważanego problemu i analizy te nie rozwinęły się w sposób zadowalający przez ostatnie kilkadziesiąt lat.

Dawid Hilbert również jasno zdawał sobie sprawę z konieczności rozważań nad Podmiotem Matematycznym i sformułował jego podstawowe własności w postaci aksjomatu, który rozbijam na następujące człony[14]:

- AH1. Ja Myślę.
- AH2. Myślę rzeczy (lub o rzeczach).
- AH3. Za pomocą (prostych) znaków mogę:
  (a) oznaczać nimi pomyślane rzeczy,
  (b) rozpoznawać ponownie uczynione znaki,
  (c) dobierać znaki w sposób (do)wolny.
- AH4. Prawa operowania pojęciami rzeczy i operowania znakami mogę opisać zupełnie.
- AH5. Mam zdolność samorefleksji.

W tej postaci jest mało praktyczny i jest raczej schematem aksjomatów. Doprecyzowanie sposobów rozumienia terminów w nim występujących pozwoli stworzyć pojęcia różnych Podmiotów Matematycznych. Z punktu widzenia rozważań z tej sekcji najważniejsze terminy to *myślenie* oraz *rzecz*[15]. W przypadku Podmiotu Matematycznego integralną częścią myślenia jest wnioskowanie. Pożądaną jego cechą jest niezawodność, co wykłada się w terminach prawdy w ten sposób, że nie może prowadzić od prawdziwych przesłanek do fałszywej konkluzji. Gwarantem niezawodności wnioskowania jest logika1 i wtórnie logika2. Klasyczny dowód lematu Königa (rozumiany jako wnioskowanie) jest dla Podmiotu Intuicjonistycznego zawodny, gdyż istnieje kontrprzykład. Dla Podmiotu klasycznego dowód ten jest oczywiście poprawny. Należy sądzić zatem, że Podmioty te różnią się właśnie *myśleniem*, gdyż inaczej pojmują integralną jego część — wnioskowanie.

[14] J. Dadaczyński zwrócił moją uwagę na to, że Hilbert, formułując ten aksjomat, inspirował się prawdopodobnie pracami G. Veronese. Rozważania na temat Podmiotu Matematycznego nazywa *protomatematyką*.

[15] Kognitywistyka i inne pokrewne, nowo powstałe nauki o umyśle zajmują się odpowiedzią na pytanie o myślenie.

Jeśli zaś chodzi o drugi termin — *rzeczy*, to różnica pomiędzy Podmiotami jest wyraźna. Dla Podmiotu klasycznego *rzeczy* znajdują się poza nim i tworzą obiektywną, niezależną od Podmiotu rzeczywistość. Dlatego dla matematyki klasycznej dobrze funkcjonuje korespondencyjna teoria prawdy. Wszystkie zdania matematyki dzielą się na dwie klasy: zdania prawdziwe i fałszywe. Jest to stan rzeczy niezależny od wiedzy Podmiotu. Dopiero poprawny dowód jakiegoś zdania jest kryterium pozwalającym stwierdzić jego prawdziwość. W przypadku Podmiotu intuicjonistycznego *rzeczy* są niejako w nim — są wytworami jego myślenia. Z tego powodu nie wiadomo jak pogodzić subiektywistyczne (soplipsystyczne) tendencje Brouwera z pojęciem *prawdy* w sensie korespondencyjnym. Raczej należałoby w intuicjonizmie mówić o jakiejś postaci koherencyjnej teorii prawdy. Prawdziwość wtedy sprowadzałaby się do pojęcia niesprzeczności pomiędzy konstrukcjami. Czasami odrzucenie jakiegoś zdania matematycznego w intuicjonizmie polega na wyprowadzeniu konsekwencji sprzecznych z uznaną porcją tej matematyki. Tak też postępuje się w przypadku *Fan Theorem*; znany kontrprzykład polega na wyprowadzeniu pewnej zasady, która z kolei opiera się na prawie wyłączonego środka[16].

Jedna z najważniejszych różnic pomiędzy oboma Podmiotami leży w rozumieniu nieskończoności. Dla intuicjonistów nie istnieje nieskończoność w sensie niezależnym od Podmiotu (musi on podać regułę tworzącą zbiór nieskończony), zaś dla matematyka klasycznego obiekt nieskończony istnieje obiektywnie. Wygląda na to, że nieskończoność potencjalna (intuicjonistyczna) jest pojęciem epistemicznym (podmiotowym), zaś nieskończoność aktualna pojęciem ontologicznym. Dlatego właśnie w przywołanym lemacie Königa, w którym pojawia się pojęcie nieskończonego drzewa, jest ono różnie rozumiane. Dla intuicjonisty znaczy co innego niż dla matematyka klasycznego. Pierwszy musi umieć je skonstruować, zaś drugi uznaje, że ono istnieje jako gotowe. Również pojęcie nieskończonej gałęzi, które występuje w lemacie ma inne znaczenie: dla intuicjonisty to taki ciąg, że dla dowolnego wyrazu

[16]Ta zasada to *Lesser Limited Principle of Omniscience (LLPO)*.

ciągu, zawsze istnieje element następny, zaś dla matematyka klasycznego ciąg jest dany (jako cały) równocześnie.

Rozważania te miały pokazać, że z użyciem Podmiotu Matematycznego można w sposób bardziej metodyczny pokazać różnice pomiędzy matematyką intuicjonistyczną a klasyczną.

2.3. TWIERDZENIE GÖDLA I PROBLEM STOPU

Gödel podał w swoim najbardziej znanym artykule o niezupełności systemów formalnych (1931) dwa dowody głównego twierdzenia. Pierwszy dowód w sekcji pierwszej artykułu „jest nieformalną prezentacją głównego argumentu i może być czytany przez niematematyków; pokazuje on jak argument traktując o zdaniu (*proposition*), które mówi o sobie *Nie jestem dowiedlne*, zamiast o zdaniu, które mówi o sobie *Nie jestem prawdziwe*, omija paradoks Kłamcy nie wpadając w niego. Gödel również pokazuje relację jego argumentu do metody diagonalizacji Cantora i paradoksu Richarda [...]"[17]. Najważniejszym lematem dowodu głównego twierdzenia o niezupełności jest:

Lemat Przekątniowy Dla dowolnej formuły $A(x)$ w języku arytmetyki AR, która posiada zmienną x jako jedyną zmienną wolną, istnieje zdanie B w języku tej teorii takie, że $\mathrm{AR} \vdash B \equiv A(g(B))$; gdzie $g(B)$ jest numerem gödlowskim zdania B.

Formuła B nazywa się czasem *fixpoint* (punktem stałym) dla formuły $A(x)$. Ściśle rzecz biorąc nie jest tak, że zdanie B *mówi o sobie (czy też o swoim numerze gödlowskim), iż ma on własność* A. Lemat ten mówi jedynie, że istnieje zdanie B logicznie równoważne temu, że własność A orzeka się o numerze gödlowskim B[18]. Konstrukcja zdania B wykorzy-

[17] [Heijenoort, 592]. Ciekawą rzeczą samą w sobie jest to, czy mamy rzeczywiście do czynienia z dwoma dowodami, czy też z dwiema wersjami jednego dowodu. Wydaje się, że można myśleć o pierwszym dowodzie jako o dowodzie treściowym, zaś o drugim jako o formalnym. Rzecz jest chyba warta rozważenia. Między innymi rodzi się pytanie na jakiej podstawie twierdzimy, że dowody te są jakoś ze sobą spokrewnione.

[18] Por. [Field, 27]. Field pokazuje zastosowanie tego lematu do dowodu innych twierdzeń.

stuje technikę *diagonalizacji* dla osiągnięcia samoodniesienia. Gödel w drugim dowodzie twierdzenia o niezupełności (pierwszego) nie użył pojęcia prawdy i nie korzystał z samoodniesienia zdania G. Twierdzenie o niezupełności (i dowód) ma charakter syntaktyczny. Z lematu przekątniowego wykorzystuje się tylko fakt istnienia *fixpoint*. Natomiast pierwszy intuicyjny dowód ma charakter semantyczny i używa pojęcia prawdy. W nim też pojawia się element samoodniesienia zdania G. Zdanie G mówi o sobie, że nie jest twierdzeniem AR (por. [Heijenoort, 599]).

Samoodniesienie można uzyskać na różne sposoby, a przykłady takich technik podaje Smullyan (w [Smullyan 1994, 1–2]). Są nimi: wyrażenia okazjonalne, różne operatory cytowania (cudzysłowy), oznaczanie przez literowanie (*designation by spelling*) (Quine) i numeracja gödlowska. Wcześniejszą (historycznie) od Quina, metodą uzyskiwania samoodniesienia jest metoda konkatenacji, stworzona przez Alfreda Tarskiego w pracy o pojęciu prawdy[19]. Zjawisko samoodniesienia jest czasem pożądane i może być uzyskane w sposób bardzo ogólny. Jak pokazuje Smullyan wymogi nałożone na język, o którym można sformułować ogólne twierdzenie o istnieniu punktu stałego, są dość skromne: musi zawierać predykaty i zdania, mieć regułę pozwalającą przypisywać predykaty wyrażeniom oraz dysponować jakąś relacją równoważności $\equiv$ pomiędzy zdaniami (zob. [Smullyan 1994, 16–17]).

Wracając do twierdzenia Gödla należy stwierdzić, że samoodniesienie udało się w systemie arytmetyki uzyskać dzięki numeracji gödlowskiej, operacji podstawiania oraz użyciu diagonalizacji[20]. Spróbujmy teraz wyrazić to w terminach Podmiotu Matematycznego. Twierdzenie, które udowodnił Gödel różni się od tego, co dzisiaj obiegowo nazywamy „twierdzeniem Gödla”. Mówiąc o tym twierdzeniu mamy na myśli fakt, że wszystkie formalne systemy, w których da się odtworzyć „pewną porcję arytmetyki” są niezupełne. Sam Gödel w notce do swego

[19]Została ona ostatnio rozwinięta twórczo przez Andrzeja Grzegorczyka. Innymi słowy można przypuszczać, że Tarski miał wszystkie środki by udowodnić twierdzenie o niezupełności.

[20]Smullyan twierdzi, że w ogólności można uzyskać samoodniesienie bez zmiennych i operacji podstawiania. Por. [Smullyan 1994, 4–5].

artykułu poczynił spostrzeżenie, iż zasięg jego twierdzenia jest znacznie szerszy (por. [Heijenoort, 616]). System, do którego się ono odnosi musi jednak spełniać pewne minimalne warunki, które pozwolą uzyskać narzędzia do samoodniesienia. Można zaryzykować tezę iż właśnie samoodniesienie wywołuje w systemie formalnym (który ma trafnie (sound) opisywać własności liczb naturalnych) efekt, który zwiemy niezupełnością. Zgodnie z aksjomatem Hilberta Podmiot posiada zdolność samorefleksji, której składową jest samoodniesienie. Jeśli zatem Podmiot ma do czynienia z sytemem formalnym trafnie opisującym liczby naturalne i uda mu się zaimitować w tym systemie zdolność samoodniesienia, to wtedy efektywna wiedza Podmiotu zaczyna podlegać ograniczeniom. Jak się zdaje świadczy to o fundamentalnym ograniczeniu poznawczym Podmiotu — pełna samowiedza nie jest możliwa.

Pomiędzy twierdzeniem Gödla o niezupełności, a problemem stopu *Halting Problem* istnieje pewna więź (por. [Olszewski, 426–429]). Z nierozstrzygalności problemu stopu wynika twierdzenie o niezupełności w wersji Rossera z dodatkowym założeniem, że system arytmetyki jest trafny (*sound*) względem liczb naturalnych. Zatem z negacji tej wersji twierdzenia Gödla wynika rozstrzygalność problemu stopu dla maszyn Turinga. Sam problem stopu można rozumieć jako problem dotyczący Podmiotu. Intencją analizy Turinga było właściwie opisanie Podmiotu Obliczającego, czyli pewnego Podmiotu Matematycznego. Tym Podmiotem jest maszyna Turinga, a sam Podmiot ma charakter *transcendentalny* w sensie zbliżonym do Kantowskiego[21]. W dowodzie nierozstrzygalności problemu stopu postępuje się metodą nie wprost. Zakłada się, że istnieje maszyna Turinga M, która rozstrzyga problem stopu i wyprowadza się stąd sprzeczność. Zakłada się niejako, że istnieje Podmiot Matematyczny mogący rozstrzygnąć ów problem. Dzięki metodzie diagonalizacji uzyskuje się w dowodzie samoodniesienie do maszyny M. Maszyna M jest przykładem szczególnej maszyny — *uni-*

[21]Oczywiście rozważania Kanta o Podmiocie mają charakter wyłącznie filozoficzny i dlatego trudno o precyzyjne rozstrzygnięcie czym jest jego Podmiot Transcendentalny. Jest to interesujący trop filozoficzny, który rozwinę szczegółowo w większej pracy o Podmiocie Matematycznym.

wersalnej maszyny Turinga. Posiada ona zdolność symulowania każdej maszyny Turinga na podstawie opisu (por. [Sipser, 160]). Według mnie twierdzenie o nierozstrzygalności problemu stopu zależy od przyjęcia TC, czyli od przyjęcia pewnych założeń o Podmiocie Matematycznym. TC może być fałszywa i zakres problemów rozstrzygalnych przez Podmiot Matematyczny mógłby być szerszy. Wtedy nie można wykluczyć, że problem następujący: czy istnieje Podmiot Matematyczny zdolny do rozstrzygnięcia problemu stopu dla maszyn Turinga, mógłby mieć pozytywną odpowiedź. W problemie stopu pytamy czy istnieje maszyna Turinga, która problem ten rozstrzyga i tym, co decyduje, iż obie powyższe stylizacje problemu stopu są równoważne jest właśnie TC[22].

Mówienie o systemach formalnych i o maszynach Turinga jest ściśle ze sobą powiązane. Wydaje się, że według Gödla można utożsamić każdą maszynę Turinga z systemem formalnym. Napisał on w notce do wydania angielskiego tłumaczenia swego artykułu o niezupełności (w [Heijenoort]):

> W konsekwencji późniejszych osiągnięć, w szczególności faktowi należnemu pracy A.M. Turinga[23], precyzyjna i bez wątpienia adekwatna definicja ogólnego pojęcia systemu formalnego[24] może być obecnie podana i ogólne wersje twierdzeń VI i XI są obecnie możliwe. Znaczy to, że można ściśle udowodnić, iż w *każdym* niesprzecznym systemie formalnym, który zawiera pewną porcję teorii liczb istnieje nierozstrzygalne arytmetyczne zdanie i co więcej, niesprzeczność takiego systemu nie może być udowodniona w systemie [Heijenoort, 616].

---

[22] Samoodniesienie Podmiotu Matematycznego (rozumianego jako maszyna Turinga) ujawnia się najpełniej w twierdzeniu o rekursji.

[23] Tutaj Gödel odwołuje się do pracy Turinga *On Computable Numbers* 1937.

[24] „W mojej opinii termin 'system formalny' lub 'formalizm' nie powinien być używany na coś innego oprócz tego pojęcia.[...] Ja zasugerowałem pewne pozaskończone uogólnienie formalizmów, ale są one czymś radykalnie różnym od systemów formalnych we właściwym znaczeniu tego terminu i ich cechą charakterystyczną jest to, że rozumowanie w nich, w zasadzie, może być całkowicie zastąpione przez mechaniczne urządzenia" [Heijenoort, 616].

3. PODSUMOWANIE

Powyższe rozważania są dość ogólne i nie przekładają się na całkiem konkretne wyniki formalne. Takie wyniki zostaną podane w dalszych pracach pod warunkiem, że możliwe jest uczynienie Podmiotu Matematycznego bardziej precyzyjnym, czego obecnie nie da się przesądzić. Hilbert zauważył w 1932 roku, że:

> W matematyce — tak jak we wszystkich badaniach naukowych — spotykamy się z tendencjami dwojakiego rodzaju: tendencją do abstrakcji, starającą się zanalizować opracowywany różnorodny materiał z logicznego punktu widzenia i ująć go w systematyczny wykład, oraz z tendencją do poglądowości, która zmierza raczej do bezpośredniego poznania przedmiotów badania i faktycznych stosunków pomiędzy nimi [Hilbert, 7].

Tę dwojakiego rodzaju tendencję można zauważyć również w obrębie filozofii. Niniejsza praca ma charakter poglądowy w powyższym znaczeniu tego terminu. Moją intencją było postawienie zagadnienia i argumentacja za tytułową tezą. Uważam, że nie można rozsądnie uprawiać filozofii matematyki pomijając Podmiot Matematyczny. Reasumując starałem się pokazać, że:

- Teza Churcha rozumiana jako własność Podmiotu Matematycznego jest przesłanką w określeniu pojęcia *modelu zamierzonego*.
- Pojęcie Podmiotu Matematycznego pozwala lepiej ująć i wyrazić związki pomiędzy filozofią intuicjonistyczną i platońską.
- Samorefleksję Podmiotu Matematycznego można wyrazić matematycznie w odpowiednio bogatym systemie arytmetycznym lub w stylizacji maszyn Turinga.

LITERATURA

Bridges D., "Constructive Mathematics", [w:] *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Dummett Michael, *Elements of Intuitionism*, Clarendon Press, Oxford 1977.

Chang C.C., Keisler H. Jerome, *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam 1973.

Field Hartry, *Saving Truth from Paradox*, Oxford University Press 2008.

Grzegorczyk A., *Zarys arytmetyki teoretycznej*, PWN, Warszawa 1971.

Heijenoort van J., *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge 1967.

Hilbert D., Cohn-Vossen S., *Geometria poglądowa*, PWN, Warszawa 1956.

Hodges Wilfrid, *A Shorter Model Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.

Olszewski Adam, *Teza Churcha. Kontekst historyczno-filozoficzny*, Universitas, Kraków 2009.

Quinon P., Zdanowski K., *The Intended Model of Arithmetic. An Argument from Tennenbaum's Theorem*, [w:] *Computation and Logic in the Real World*, CiE 2007, Local Proceedings, (ed.) S.B. Cooper, B. Loewe i A. Sorbi, 2007.

Sipser Michael, *Introduction to the Theory of Computation*, PWS Publishing Company 1997.

Smullyan Raymond M., *Diagonalization and Self-Reference*, Oxford Logic Guides, Oxford 1994.

Smullyan Raymond M., *First-Order Logic*, Dover Publications, New York 1995.

Troelstra A.S., van Dalen D., *Constructivism in Mathematics*, North–Holland, Amsterdam, New York 1988.

SUMMARY

ON THE IRREMOVABILITY OF MATHEMATICAL SUBJECT

In the paper I attempt to show that the Mathematical Subject is irremovable from the Philosophy of Mathematics. In doing so I want to argue, first, that Church's Thesis should be seen as a statement about the Mathematical Subject. Second, I want to show that philosophical relations between some problems such as König's lemma vs Fan Theorem, or Gödel's theorem on incompleteness vs Halting problem, could be better grasped within the framework of the Mathematical Subject.