Piotr Błaszczyk

O definicji 7 z Księgi V „Elementów” Euklidesa

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 46, 118-140

2010

Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLVI (2010), 118–140

Piotr Błaszczyk
Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków

O DEFINICJI 7 Z KSIĘGI V „ELEMENTÓW” EUKLIDESA

WSTĘP

Klasycznym historycznym przykładem teorii aksjomatycznej jest wykład geometrii z *Elementów* Euklidesa. Istotnie, Księgę I otwiera seria definicji i aksjomatów, w kolejnych Księgach dopisywane są nowe definicje, a poszczególne twierdzenia zdają się być wyprowadzane z tych aksjomatów i wcześniej udowodnionych twierdzeń. Daleko tu jednak do współczesnego wzorca teorii aksjomatycznej. Już sama struktura dedukcyjna *Elementów* nie jest jasna: Euklides nie podaje żadnych komentarzy i nie wyjaśnia, które aksjomaty, czy twierdzenia są wykorzystywane w dowodzie, nie zawsze jasna jest różnica między definicją i aksjomatem, a wreszcie zagadką pozostaje rachunek zdań. Stąd kolejne wydania *Elementów* obrastają komentarzami, nowymi aksjomatami i definicjami, a rzecz wydaje się nie mieć końca; i tak do dzisiaj nie wiadomo na przykład, jaki jest matematyczny sens aksjomatu „Całość jest większa od części”, co oznacza pojęcie „wielkość”, czy Euklides stosuje prawo wyłączonego środka.

Przez wieki *Elementy* były po prostu źródłem wiedzy matematycznej, w nowożytności tracąc na znaczeniu jako teoria matematyczna stanowiły zasadniczy korpus nauczania matematyk. W XIX zaś wieku narodziło nowe podejście — przedmiotem zainteresowania stała się sama aksjomatyka geometrii Euklidesa. Do zdecydowanie wybitnych prac w tej dziedzinie zaliczamy M. Pascha *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882), D. Hilberta *Grundlagen der Geometrie* (1899) oraz K. Borsuka, W. Szmielew *Podstawy geometrii* (1955). W grupie tej praca Hilberta zajmuje wyróżnioną pozycję, bo wyznaczyła standardy w badaniu teorii aksjomatycznej.

W Księdze V *Elementów* zawarta jest aksjomatyczna teoria „wielkości" i, przypisywana Eudoxosowi, teoria proporcji „wielkości ciągłych". Stanowi ona podstawę wyłożonej w Księdze VI teorii figur podobnych i jest stosowana dalej w Księgach X–XIII. W wykładzie Euklidesa spełnia ona taką rolę, jak arytmetyka liczb rzeczywistych we współczesnych wykładach geometrii.

Aksjomatyczna teoria proporcji nie spotkała się z zainteresowaniem równym geometrii Euklidesa. Było tak, po części, dlatego, że rozwój geometrii aksjomatycznej splatał się z rozwojem aksjomatyki liczb rzeczywistych, a jednym z pomysłów Hilberta było wykorzystanie do badania podstaw geometrii ciał uporządkowanych. Ostatecznie twierdzenia Euklidesa, w których stosowana jest teoria proporcji są dzisiaj formułowane z użyciem liczb rzeczywistych, a z teorii Eudoxosa pozostały jedynie słowa stosunek i proporcja.

Obecnie na teorię proporcji z Księgi V można spojrzeć co najmniej z trzech perspektyw: filozoficznej, historycznej oraz matematycznej. Do idei z Księgi V sięgają tak zwani neologicy, gdzie w ramach szerokozakrojonego programu wprost nawiązującego do filozofii matematyki G. Frege, Bob Hale przedstawił koncepcję rekonstrukcji arytmetyki liczb rzeczywistych opartą na teorii proporcji Eudoxosa[1]. Rozpatrując Księgę V w perspektywie historycznej można pokazać, że teoria proporcji doprowadziła do ukształtowania się idei grupy uporządkowanej archimedesowej. Kulminacją tego wątku są prace H. Webera *Lehrbuch der Algebra* (1895) oraz O. Höldera *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass* (1901). Teorię proporcji można wreszcie badać jako pewną teorię dedukcyjną. Do tego nurtu zaliczamy książkę I. Muellera *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Ele-*

[1]Zob. [Hale 2000], s. 100–123.

ments (1981) oraz najgruntowniejsze opracowanie teorii Eudoxosa, artykuł F. Beckmanna *Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids* (1967), gdzie we wstępie czytamy:

> Autor niniejszej pracy chce odczytać główne dzieło Euklidesa «ze współczesnej perspektywy» i sprawdzić, czego może się zeń nauczyć współczesny, znający prace van der Waerdena i Bourbakiego, matematyk, oraz co nowego mogą wnieść te studia do wiedzy o matematyce greckiej.

W niniejszym artykule przyjmujemy tę trzecią perspektywę.

1. EUKLIDES, „ELEMENTY”, KSIĘGA V, DEFINICJE 1–7

Księga V *Elementów* zawiera wykład teorii proporcji wielkości ciągłych. Jej autorstwo przypisuje się Eudoxosowi z Knidos i dlatego jest ona nazywana teorią proporcji Eudoxosa.[2] Euklides stosuje ją w teorii figur podobnych (Księga VI) do klasyfikacji wielkości współmiernych i niewspółmiernych (Księga X) oraz do badania stosunków brył (Księgi XI–XII).

Przytaczamy niżej siedem pierwszych definicji z Księgi V oraz ich interpretację, zapisując je przy użyciu współczesnej notacji. *Elementy* podajemy w tłumaczeniu na angielski autorstwa T.L. Heatha wraz z tłumaczeniem własnym:

1. “A magnitude (μεγεϑος) is a part of a magnitude, the less [A] of the greater [B], when it measures the greater”[3].

„Wielkość jest częścią innej wielkości, mniejsza — większej, gdy mierzy większą”.

A jest mniejsza od B: $A < B$,

A jest częścią B: $nA = B$ gdzie $nA =_{df} \underbrace{A + \cdots + A}_{n-razy}$,

A mierzy B: $nA = B$.

2. “The greater [B] is a multiple of the less [A] when it is

[2] Zob. [Heath 1926], t. II, s. 113.

[3] [Euklides, Elementy, V, def. 1]; literowe nazwy wielkości zostały dodane — P.B.

measured by the less”[4].

„Większa jest wielokrotnością mniejszej, gdy jest mierzona przez mniejszą”.

B jest wielokrotnością A: $B = nA$,
B jest mierzona przez A: $B = nA$.

3. “A ratio ($\lambda o\gamma o\varsigma$) is a sort of relation in respect of size ($\pi\eta\lambda\varkappa o\tau\eta\varsigma$) between two magnitudes ($\mu\varepsilon\gamma\varepsilon\vartheta o\varsigma$) of the same kind”[5].

„Stosunek to pewna relacja z uwagi na mierzenie między wielkościami tego samego rodzaju”.

Jakkolwiek trudno jest nadać matematyczny sens tej definicji, to można wyjaśnić pojęcie „wielkości tego samego rodzaju”[6]. Otóż wielkości „tego samego rodzaju” są dodawane (+) oraz porównywane z uwagi na relację „większy-mniejszy” ($<$). Na podstawie analizy dowodów z Księgi V przyjmujemy, że dodawanie wielkości + jest działaniem wewnętrznym[7], łącznym i przemiennym[8], a porządek $<$ jest liniowy[9]. Dlatego przyjmujemy, że wielkości tego samego rodzaju tworzą strukturę algebraiczno-porządkową $\mathfrak{M} = (M, +, <)$, gdzie + oraz $<$ są scharakteryzowane jak wyżej. To, że wielkości A, B są tego samego rodzaju zapisujemy w następujący sposób: $A, B \in \mathfrak{M}$.

4. “Magnitudes [A, B] are said to have a ratio to one another which can, when multiplied, exceed one another”[10].

„O wielkościach mówimy, że jedna jest w stosunku do drugiej, gdy biorąc wielokrotność jednej można przekroczyć drugą”.

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}\ \exists n \in \mathbb{N}\ [nA > B].$$

[4] [Euklides, Elementy, V, def. 2]; literowe nazwy wielkości zostały dodane — P.B.

[5] [Euklides, Elementy, V, def. 3].

[6] Zob. „Definicja stosunku podana przez Euklidesa jest matematycznie bezużyteczna” [Mueller 1981], s. 126.

[7] Zob. Euklides, *Elementy*, V, *passim*.

[8] Zob. Euklides, *Elementy*, V, dowód twierdzenia 1.

[9] Przechodniość jest zakładana w dowodzie twierdzenia V.8, spójność — w dowodach twierdzeń V.9, V.10, V.18.

[10] [Euklides, Elementy, V, def. 4]; literowe nazwy wielkości zostały dodane — P.B.

Jest to tzw. aksjomat Archimedesa, chociaż odpowiedni aksjomat podany przez samego Archimedesa ma trochę inną postać[11].

> 5. "Magnitudes [A, B, C, D] are said to be in the same ratio, the first [A] to the second [B] and the third [C] to the fourth [D], when, if any equimultiples whatever be taken of the first [nA] and third [nC], and any equimultiples whatever of the second [mB] and fourth [mD], the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order"[12].
>
> „O wielkościach mówimy, że są w tym samym stosunku, pierwsza do drugiej i trzecia do czwartej, gdy biorąc dowolne wielokrotności pierwszej i trzeciej oraz dowolne wielokrotności drugiej i czwartej, pierwsze wielokrotności będą jednocześnie większe, jednocześnie równe lub jednocześnie mniejsze od odpowiednio wziętych drugich wielokrotności".

$$A : B :: C : D \leftrightarrow_{df} \forall m, n \in \mathbb{N}\ [(nA >_1 mB \to nC >_2 mD) \wedge$$
$$\wedge\ (nA = mB \to nC = mD) \wedge (nA <_1 mB \to nC <_2 mD),$$

gdzie $A, B \in \mathfrak{M}_1 = (M_1, +_1, <_1),\ C, D \in \mathfrak{M}_2 = (M_2, +_2, <_2)$.

Proporcja jest zatem relacją między dwoma parami wielkości (A, B), (C, D). W każdej z par wielkości muszą być tego samego rodzaju, dlatego piszemy $A, B \in \mathfrak{M}_1$, $C, D \in \mathfrak{M}_2$. Ale wielkości z różnych par, np. A oraz C, mogą być różnego rodzaju. Doskonale ilustruje to twierdzenie VI, 1:

> "Triangles [...] which are under the same hight are to one another as their bases"[13].
>
> „Trójkąty [...] o tych samych wysokościach mają się tak do siebie, jak ich podstawy".

---

[11]Zob. "Of unequal lines, unequal surfaces, and unequal solids, the greater exceeds the less by such a magnitude as, when added to itself, can be made to exceed any assigned magnitude among those which are comparable with [it and with] another one" [Archimedes], Księga I, s. 4; symbolicznie: $A < B \to \exists n\ [n(B-A) > B,\ n(B-A) > A]$.

[12][Euklides, Elementy, V, def. 5]; literowe nazwy wielkości zostały dodane — P.B.

[13]Euklides, *Elementy*, VI, 1.

W proporcji występują tu z jednej strony trójkąty (T_1, T_2), z drugiej – odcinki (b_1, b_2) i twierdzenie VI, 1 można zapisać w postaci $T_1 : T_2 :: b_1 : b_2$.

> 6. "Let magnitudes which have the same ratio be called proportional"[14].
>
> „Wielkości, które są w tym samym stosunku nazwijmy proporcjonalnymi".

W tej definicji ustalane jest tylko nazewnictwo, my zaś, przy tej okazji, usprawiedliwimy zastosowane wyżej oznaczenia. Zgodnie ze zwyczajem, stosunek wielkości A, B zapisywany jest jako $A : B$, zaś proporcja — jako $A : B :: C : D$. Zwyczaj ten został zapoczątkowany w XVII wieku przez Vicenta Winga (stosunek) i Williama Outgethered (proporcja)[15]. Przypomnijmy jeszcze, że proporcja to po grecku αναλογια.

> 7. "When, of the equimultiples, the multiple of the first magnitude [nA] exceeds the multiple of the second [mB], but the multiple of the third [nC] does not exceed the multiple of the fourth [mD], then the first is said to have a greater ratio to the second then the third has to the fourth"[16].
>
> „Przy równych wielokrotnościach, gdy wielokrotność pierwszej wielkości przekracza wielokrotność drugiej, a wielokrotność trzeciej nie przekracza wielokrotności czwartej, wtedy mówimy, że pierwsza jest w większym stosunku do drugiej niż trzecia do czwartej".

$$A : B \succ C : D \leftrightarrow_{df} \exists m, n \in \mathbb{N}\ [nA >_1 mB,\ nC \leqslant_2 mD],$$

gdzie $A, B \in \mathfrak{M}_1 = (M_1, +_1, <_1),\ C, D \in \mathfrak{M}_2 = (M_2, +_2, <_2)$.

Przyjmując wyżej wskazane założenia o strukturze $\mathfrak{M}$ oraz aksjomaty

(E1) $\exists n \in \mathbb{N}\ [nA > B]$,

[14] [Euklides, Elementy, V, def. 6].

[15] Zob. [Grattan-Guiness 1996].

[16] [Euklides, Elementy, V, def. 7]; literowe nazwy wielkości zostały dodane — P.B.

(E2) $A > C \rightarrow \exists E\ [C + E = A]$,

(E3) $A > C \rightarrow A + B > C + B$,

(E4) $\forall A\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists B\ [nB = A]$,

(E5) $\forall A, B, C\ \exists X\ [A : B :: C : X]$, gdzie $A, B, C, E, X \in \mathfrak{M}$,

można wyprowadzić wszystkie twierdzenia Księgi V.

W zdecydowanej większości komentarzy nie wyszczególnia się założeń dotyczących działania + oraz porządku <, gdy zaś idzie o aksjomaty, to komentatorzy wymieniają jedynie (E1), Bourbaki zaś obok (E1) podaje jeszcze (E2)[17]. Zupełnie wyjątkowy natomiast pod tym względem jest artykuł [Beckmann 1967]. Otóż Beckmann skrupulatnie wylicza założenia dotyczące struktury $\mathfrak{M}$. Gdy zaś idzie o aksjomaty, to nie podaje on (E3), a obok (E1), (E2), (E4) i (E5) wypisuje wiele innych, o których można pokazać, że wynikają albo z (E3), albo z (E1), (E2), (E3), (E5). Jednak podstawowa różnica między zaproponowaną wyżej aksjomatyką, a tą, którą podaje Beckmann, polega na tym, że Beckmann przyjmuje, iż porządek < jest definiowany równoważnością $A > C \leftrightarrow \exists E[C + E = A]$[18], ale żaden fragment *Elementów* nie usprawiedliwia takiego rozstrzygnięcia. Tym samym opracowanie Beckmanna nie może być uznane za rekonstrukcję warstwy dedukcyjnej Księgi V. Beckmann zresztą sam przyznaje, że „stosuje swój własny system aksjomatów, ustanowiony w ścisłej zgodności z Euklidesem, który pozwala wyprowadzić wszystkie definicje i twierdzenia euklidesowej teorii wielkości (zwłaszcza te z Księgi V oraz VI)".

W żadnym ze znanych nam opracowań nie rozważa się niezależności aksjomatów. Łatwo można pokazać, że (E4) wynika z (E5). Można też pokazać, że aksjomaty (E1), (E2), (E3), (E5) są niezależne. Można wreszcie pokazać, że z aksjomatów (E1), (E2), (E3), (E5) istotnie wynika liniowość porządku stosunków > zadanego definicją V, 7, ale można też pokazać, i to jest celem niniejszego artykułu, że do wykazania liniowości porządku > nie wystarczy jedynie (E1). W dalszym

[17]Zob. [Bourbaki 1966].

[18]Zob. [Beckmann 1966], s. 51, definicja D.0.

ciągu odnosimy się zatem tylko do tych opracowań, które o strukturze wielkości $\mathfrak{M}$ zakładają jedynie aksjomat Archimedesa.

2. EUKLIDES, „ELEMENTY”, KSIĘGA V, TWIERDZENIA 8–10

Przedstawimy teraz trzy twierdzenia z Księgi V, które będą przywołane w dalszej części artykułu.

> “Proposition 8. Of unequal magnitudes $[AB, C]$, the greater $[AB]$ has to the same $[D]$ a greater ratio than the less $[C]$ has; and the same has to the less a greater ratio than it has to the greater”[19].
>
> „Spośród nierównych wielkości, większa jest do tej samej w większym stosunku niż mniejsza. I stosunek tej samej do mniejszej jest większy od jej stosunku do większej”.

Symbolicznie:

$$AB > C \rightarrow AB : D > C : D, \quad AB > C \rightarrow D : C > D : AB.$$

> “Proposition 9. Magnitudes which have the same ratio to the same equal one another; and magnitudes to which the same has the same ratio are equal.
>
> For let each of the magnitudes A and B have the same ratio to C. I say that A is equal to B. For, otherwise, each of the magnitudes A, B would not have the same ratio to C; but it has; therefore A is equal to B. [...]”[20].
>
> „Twierdzenie 9. Wielkości, które są w tym samym stosunku do tej samej są sobie równe. I wielkości, do których ta sama jest w tym samym stosunku są sobie równe. Niech każda z wielkości A i B będzie w tym samym stosunku do C. Twierdzę, że A jest równe B. W przeciwnym razie, wielkości A i B nie byłaby w tym samym stosunku do C, ale tak jest, dlatego A jest równe B. [...]”.

[19] [Euklides, V, 8]; oznaczenia literowe zostały dodane — P.B.; są to dokładnie takie oznaczenie, jakich użyto w dowodzie Euklidesa, w szczególności AB oznacza tu jedną wielkość.

[20] [Euklides, V.9].

Dowód Euklidesa jest, jak widać, dowodem nie wprost, ostatecznie nie jest jednak pokazane na czym polega sprzeczność. Czasami dowód ten jest tak rekonstruowany, iż przyjmuje się, że według Euklidesa sprzeczność polega na tym: $(A : C :: B : C) \wedge (A : C \succ B : C)$. Ale dowód twierdzenia V, 9 można również i tak zrekonstruować, że dochodzi się do sprzeczności z liniowością porządku w strukturze $\mathfrak{M} = (M, +, <)$, gdzie $A, B, C \in \mathfrak{M}$, mianowicie:

Twierdzenie V, 9.
$A : C :: B : C \rightarrow A = B, \quad C : A :: C : B \rightarrow A = B.$

Dowód. Pokażemy pierwszą implikację. Przyjmijmy, że:

$$A : C :: B : C \wedge A \neq B.$$

Stąd oraz ze spójności relacji $<$ wynika, że $(A > B) \vee (B > A)$. Niech będzie $A > B$. Z twierdzenia V.8 otrzymujemy $A : C \succ B : C$, zatem:

$$(A : C :: B : C) \wedge (A : C \succ B : C).$$

Z definicji V, 7 dostajemy, że dla pewnych p, q jest:

$$(qA > pC) \wedge (q\,B \leqslant pC).$$

Stąd oraz z definicji V, 5, na mocy $qA > pC \rightarrow qB > pC$, dostajemy

$$qB \leqslant p\,C \quad \text{oraz} \quad qB > p\,C,$$

co jest sprzeczne z liniowością porządku w strukturze $\mathfrak{M}$. Q.E.D.

Dla uzupełnienie tej rekonstrukcji trzeba jednak dodać, że liniowość porządku $<$ nie jest w *Elementach* wprost sformułowana, bo w *Elementach* w ogóle nie ma pojęcia liniowego porządku.

> “Proposition 10. Of magnitudes which have a ratio to the same, that which has a greater ratio is greater; and that to which the same has a greater ratio is less.
>
> For let A have to C a greater ratio than B has to C; I say that A is greater than B. For, if not, A is either equal to B or less. Now A

> is not equal to B; for in that case each of the magnitudes A and B would have the same ratio to C; but they have not, therefore A is not equal to B. Nor again is A less than B; for in that case A would have to C a less ratio than B has to C, but it has not; therefore A is not less than B. [...]”[21].
>
> „Z wielkości będących w stosunku do danej wielkości ta, która ma większy stosunek jest większa; natomiast ta, do której dana wielkość ma większy stosunek, jest mniejsza. Niech stosunek A do C będzie większy niż B do C. Twierdzę, że [wielkość — P.B.] A jest większa od B. Jeśli nie, wtedy A jest równa B, bądź jest od niej mniejsza. A nie jest równa B, ponieważ w takim przypadku każda z wielkości A i B miałaby taki sam stosunek do C, a tak nie jest; dlatego A nie jest równa B. A nie jest też mniejsza od B, bo wtedy jej stosunek do C byłby mniejszy niż stosunek B do C, ale tak nie jest, dlatego A nie jest mniejsza od B”.

Symbolicznie twierdzenie 10 można więc tak przedstawić:

$$A : C \succ B : C \rightarrow A > B, \quad C : B \succ C : A \rightarrow A > B,$$

a dowód jest ewidentnie dowodem nie wprost: Gdy $A = B$, to:

$$(A : C :: B : C) \wedge (A : C \succ B : C).$$

Można przyjąć, że na tym właśnie polega sprzeczność, lub poprowadzić myśl dalej tak, jak to zrobiliśmy wyżej, by dojść do sprzeczności z liniowością porządku $<$ w strukturze $\mathfrak{M}$.

Gdy $A < B$, to:

$$(A : C \prec B : C) \wedge (A : C \succ B : C).$$

Można przyjąć, że na tym właśnie polega sprzeczność lub poprowadzić myśl dalej. Wówczas z $A : C \succ B : C$ dostajemy, że dla pewnych p, q jest:

$$(qA > pC) \wedge (pC \geqslant qB),$$

[21] [Euklides, V, 10].

a stąd $qA > qB$. Z założenia $A < B$, na mocy ($E3$), dostajemy $qA < qB$. Ostatecznie:

$$(qA < qB) \wedge (qA > qB),$$

co jest sprzeczne z liniowością porządku w strukturze $\mathfrak{M}$. Q.E.D.

3. INTERPRETACJE DEFINICJI V, 7

1. Roger Penrose (2004)

> Pierwszym krokiem w teorii Eudoksosa było ustalenie kryterium, co to znaczy, że jakiś stosunek długości $a : b$ miałby być większy niż stosunek innych długości, $c : d$. Kryterium to jest następujące: stosunek $a : b$ jest większy od stosunku $c : d$, jeśli istnieją dwie liczby naturalne M i N takie, że jeżeli a dodamy do siebie M razy i długość ta będzie większa od długości, jaką otrzymamy po dodaniu do siebie b N razy, to d dodane do siebie N razy będzie dłuższe od c dodanego do siebie M razy. Analogiczne kryterium formułuje warunek, żeby stosunek $a : b$ był mniejszy od stosunku $c : d$. Warunkiem równości tych stosunków jest niespełnienie żadnego z tych dwu kryteriów. W ten sposób dzięki pomysłowemu rozwiązaniu problemu równości dwu stosunków Eudoksos otrzymał w rezultacie abstrakcyjne pojęcie «liczby rzeczywistej» wyrażone przez stosunki długości[22].

W ujęciu tym definicja V, 7 wyrażona jest formułą:

$$a : b \succ c : d \leftrightarrow \exists M, N\ [(Ma > Nb) \wedge (Mc < Nd)],$$

zaś definicja V, 5 formułą:

$$a : b = c : d \leftrightarrow \neg(a : b \succ c : d) \wedge \neg(a : b \prec c : d).$$

Przyjmując tautologię $(a : b = c : d) \vee (a : b \neq c : d)$, dostajemy:

$$(a : b \prec c : d) \vee (a : b = c : d) \vee (a : b \succ c : d).$$

2. Fabio Acerbi (2003)

[22] [Penrose 2004], s. 56–57.

> [R]ozważania przedstawione w niniejszej pracy [...] wyraźnie wskazują, że opracowanie def. 5 wynikło z istotnych badań nad tym, czym jest dysproporcja. Jest prawdopodobne, że def. 5 w rzeczywistości sformułowano jako logiczne uzupełnienie def. 7 [...]. Ale przejście od zaprzeczenia dysproporcji do proporcji jest oczywiste i nie zostawia miejsca na coś matematycznie znaczącego[23].

Przyjmując, że definicja V, 7 dana jest formułą z §1, definicja V, 5 przyjmie w tym ujęciu postać:

$$A : B :: C : D \leftrightarrow \neg(A : B \prec C : D) \wedge \neg(A : B \succ C : D),$$

a stąd, podobnie jak wyżej, dostajemy:

$$(A : B \prec C : D) \vee (A : B :: C : D) \vee (A : B \succ C : D).$$

3. Benno Artmann (2001)

> V, Def. 7 (we współczesnej notacji) $a : b > c : b$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby r, s, że $ra \geqslant sb$ oraz $rc < sd$.
>
> Biorąc pod uwagę porządek liniowy, to nic innego jak negacja Def. 5 (włączając przypadek $a : b < c : b$). Stosując współczesną matematykę, tak jak to uczyniliśmy w przypadku Def. 5, przekłada się to na: $a/b > c/d$, gdy istnieją takie liczby naturalne r, s, że $a/b \geqslant s/r > c/d$, tj. gdy między liczbami rzeczywistymi [a/b oraz c/d — P.B.] istnieje liczba wymierna [s/r — P.B][24].

W ujęciu tym definicja V, 7 wyrażona jest formułą:

$$a : b \succ c : d \leftrightarrow \exists r, s\ [(ra \geqslant sb) \wedge (rc < sd)],$$

zaś definicja V, 5 formułą:

$$a : b = c : d \leftrightarrow \neg(a : b \succ c : d) \wedge \neg(a : b \prec c : d).$$

[23] [Acerbi 2003], s. 236.
[24] [Artmann 2001], s. 133.

Stąd, podobnie jak wyżej, dostajemy:

$$(a : b < c : d) \vee (a : b = c : d) \vee (a : b > c : d).$$

4. David E. Joyce (1997)

> W odniesieniu do stosunków prawo trychotomii orzeka, że dla dowolnych dwóch stosunków $w : x$ oraz $y : z$ zachodzi dokładnie jeden z warunków: $w : x < y : z$ lub $w : x = y : z$, lub $w : x > y : z$. Euklides nie zamieścił wśród aksjomatów prawa trychotomii dla wielkości i nie uczynił tego także w odniesieniu do stosunków. Ta część owego prawa, która orzeka, że zachodzi co najwyżej jeden z przypadków jest użyta po raz pierwszy w twierdzeniu V, 9, natomiast ta część, która orzeka, że zachodzi przynajmniej jeden z warunków występuje po raz pierwszy w twierdzeniu V, 10[25]

W poprzednim paragrafie przedstawiliśmy naszą interpretację twierdzeń V, 9 oraz V, 10. Ciekawe jest jednak to, że w dalszej części omówienia Księgi V Joyce podaje dowód prawa trychotomii dla stosunków. Otóż definicje V, 5 oraz V, 7 Joyce zapisuje tak, jak to uczyniliśmy wyżej w §1, a w komentarzu do definicji V, 7 pisze:

> Z samych definicji [V, 5 i V, 7 — P.B.] jasno wynika, że zdania $w : x > y : z$ oraz $w : x = y : z$ są sprzeczne. [...]. Przyjmując przechodniość [porządku stosunków — P.B.], można pokazać, że sprzeczne są też zdania $w : x > y : z$ oraz $w : x < y : z$ [...]. (Są też dowody, które nie zależą od przechodniości.) Drugą stronę prawa trychotomii, mówiącą o tym, że zachodzi przynajmniej jeden z tych trzech przypadków, trudniej jest wykazać, a dowód zależy od potraktowania definicji V.4 jako aksjomatu porównywania. W istocie, bez niego rozumowanie to jest fałszywe[26].

Następnie, przyjmując aksjomat Archimedesa, Joyce podaje dowodzi, że zachodzi przynajmniej jeden ze składników alternatywy:

$$(w : x < y : z) \vee (w : x = y : z) \vee (w : x > y : z).$$

[25] [Joyce 1997].
[26] [Joyce 1997].

5. Wilbur R. Knorr (1975)

> Definicja 3. Gdy dane są dwie pary wielkości homogenicznych A, B oraz C, D, gdy dla dowolnych liczb naturalnych m, n nierówność $mA > nB$ pociąga za sobą nierówność $mC < nD$, równość $mA = nB$ pociąga za sobą równość $mC = nB$, a nierówność $mA < nB$ pociąga za sobą $mC > nD$, wtedy $A : B = C : D$.
>
> Jest to definicja Euklidesa (V, def. 5) powszechnie przypisywana Eudoksosowi[27].

> Definicja 5. Dla dwóch par wielkości A, B oraz C, D, jeżeli istnieją takie liczby naturalne m, n, że $mA > nB$, ale $mC \leqslant nD$, wtedy $A : B > C : D$.
>
> Jest to Euklidesa definicja «większego stosunku» (V, Def. 7); odwracając w niej każdą z nierówności dostajemy warunek na «mniejszy stosunek»[28].

Dalej czytamy: „Twierdzenie 6. Gdy dla wielkości A, B, C jest $A : C = B : C$, wtedy $A = B$ (*Elementy* V.9)”[29]. Na kolejnej zaś karcie Knorr podaje dowód tego twierdzenia:

> Niech $A : C = B : C$ i niech $A > B$. Wówczas, na podstawie V, def 4, istnieje taka wielokrotność $A - B$, powiedzmy m, która przekracza C. Niech p będzie pierwszą wielokrotnością C, która jest równa lub przekracza mB, tj. $pC \geqslant mB > (p-1)C$. Dodając to do poprzedniej nierówności dostajemy, że $mA > pC$ oraz $mB \leqslant pC$. Stąd, na podstawie Def. 5, $A : C > B : C$, co jest sprzeczne z wyjściowym założeniem[30].

W ujęciu tym definicje V, 5 oraz V, 7 są wyrażone tak, jak to uczyniliśmy wyżej w §1, ale w przytoczonym dowodzie Knorr zakłada, że nie może być tak, iż $(A : C = B : C) \wedge (A : C > B : C)$. Takie założenie – jak pokazaliśmy wyżej – u samego Euklidesa nie jest *explicite* zapisane.

6. Bartel L. van der Waerden (1954)

Po zacytowaniu definicji V, 7 van der Waerden pisze:

---

[27] [Knorr 1975], s. 333.
[28] [Knorr 1975], s. 334.
[29] [Knorr 1975], s. 338.
[30] [Knorr 1975], s. 339.

> To znaczy, gdy $ma > nb$, ale $mc < nd$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi, wtedy $a : b > c : d$[31].

Dalej dowodzi twierdzenia V.8, po czy pisze:

> Metodą *reductio ad absurdum* z V.8 otrzymujemy [V.9 — P.B][32].

Na czym polega sprzeczność, tego van der Waerden już nie pokazuje.

W ujęciu tym definicja V, 7 wyrażona jest formułą:

$$a : b \succ c : d \leftrightarrow \exists m, n\ [(ma > nb) \wedge (mc < nd)].$$

Natomiast definicję V, 5 zapisuje van der Waerden tak jak to zrobiliśmy wyżej w §1[33].

4. INTERLUDIUM

Parę $(X, <)$ nazywamy zbiorem liniowo uporządkowanym, gdy relacja $<$ jest przechodnia oraz spełnia prawo trychotomii, co znaczy, że dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi dokładnie jeden ze składników alternatywy:

$$(x < y) \vee (x = y) \vee (x > y).$$

W sposób równoważny zbiór liniowo uporządkowany jest też tak definiowany: Parę $(X, \leqslant)$ nazywamy zbiorem liniowo uporządkowanym, gdy relacja $\leqslant$ jest zwrotna, przechodnia, antysymetryczna, oraz spójna, tj.:

$$(x < y) \vee (x = y) \vee (x > y).$$

Przy czym przyjmuje się, że $x < y \leftrightarrow (x \leqslant y \wedge x \neq y)$.

W opisanych wyżej przypadkach definicje V, 5 oraz V, 7 przyjmują różny kształt. Dla wszystkich przypadków, z wyjątkiem (6), wspólne jest natomiast założenie o spójności relacji relacji proporcji, tj.:

$$(A : B \prec C : D) \vee (A : B :: C : D) \vee (A : B \succ C : D).$$

---

[31] [Waerden 1954, s. 188].

[32] [Waerden 1954, s. 188].

[33] Zob. [Waerden 1954, s. V176].

David E. Joyce podaje nawet dowód tej własności. W następnym paragrafie zdefiniujemy strukturę wielkości $\mathfrak{M} = (M, +, <)$, w której relacja proporcji nie jest spójna. W strukturze tej dodawanie jest działaniem wewnętrznym, łącznym i przemiennym, a porządek $<$ jest liniowy. Ponadto spełnione są aksjomaty $(E1)$ oraz $(E3)$. Odpowiada to więc temu, co o wielkościach jest wprost powiedziane w *Elementach* oraz temu, co *explicite* przyjmują wymieni wyżej autorzy.

5. KONTRPRZYKŁAD

Model 1. Zanim przejdziemy do zdefiniowania modelu, podamy kilka wstępnych informacji. Niech $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem liczb rzeczywistych. W ciele tym spełniony jest aksjomat Archimedesa w następującej postaci:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ [0 < x < y \rightarrow nx > y];$$

z tego faktu skorzystamy niżej.

Niech $\mathcal{F}$ będzie ultrafiltrem na zbiorze $\mathbb{N}$ zawierającym zbiór (filtr Frecheta):

$$\{A \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ — jest zbiorem skończonym}\}^{34}.$$

Relacja:

$$(r_n) \equiv (s_n) \leftrightarrow_{df} \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{F}$$

jest równoważnością na zbiorze $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zbiór liczb hiperrealnych $\mathbb{R}^*$ jest definiowany jako zbiór ilorazowy, $\mathbb{R}^* =_{df} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\equiv}$. W $\mathbb{R}^*$ definiowane jest dodawanie, mnożenie oraz porządek:

$$[(r_n)] \oplus [(s_n)] =_{df} [(r_n + s_n)], \quad [(r_n)] \otimes [(s_n)] =_{df} [(r_n \cdot s_n)],$$

$$[(r_n)] \lessdot [(s_n)] \leftrightarrow_{df} \{n \in \mathbb{N} : r_n < s_n\} \in \mathcal{F}.$$

[34] Rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ jest filtrem gdy: (1) $A, B \in \mathcal{F} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$, (2) $A \in \mathcal{F} \wedge A \subset B \rightarrow B \in \mathcal{F}$, (3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Gdy $\mathcal{F}$ jest filtrem i (4) $\forall A \subset \mathbb{N}\ [A \in \mathcal{F} \vee \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}]$, to $\mathcal{F}$ jest ultrafiltrem. Korzystając z aksjomatu wyboru dowodzi się, że każdy filtr jest zawarty w pewnym ultrafiltrze.

Standardowa liczba rzeczywista r jest identyfikowana z klasą równoważności r^* ciągu stałego $(r, r, ...)$, tj. $r^* =_{df} [(r, r, ...)]$[35].

Twierdzenie $(\mathbb{R}^*, \oplus, \otimes, 0^*, 1^*, \lessdot)$ jest ciałem uporządkowanym, niearchimedesowym.

Zbiór nieskończenie małych liczb hiperrealnych Ω dany jest definicją:

$$x \in \Omega \leftrightarrow_{df} \forall \theta \in \mathbb{R}_+ \; [|x| \lessdot \theta^*].$$

W zbiorze $\mathbb{R}^*$ definiujemy relację:

$$x \approx y \leftrightarrow_{df} x - y \in \Omega.$$

Zbiór ograniczonych liczb hiperrealnych $\mathbb{L}$ dany jest definicją:

$$x \in \mathbb{L} \leftrightarrow_{df} \exists \theta \in \mathbb{R}_+ \; [|x| \lessdot \theta^*].$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że $(\Omega, \oplus, 0^*, \lessdot)$ oraz $(\mathbb{L}, \oplus, 0^*, \lessdot)$ są grupami uporządkowanymi.

Twierdzenie o części standardowej: $\forall x \in \mathbb{L} \; \exists! r \in \mathbb{R} \; [r^* \approx x]$.

Część standardową ograniczonej liczby hiperrealnej x oznaczamy jako $st(x)$, czyli $(st(x))^* \approx x$.

Łatwo widać, że częścią standardową dowolnej liczby nieskończenie małej jest zero, tj. $\forall x \in \Omega \; [x \approx 0^*]$.

Przechodzimy do definicji modelu. Przyjmujemy:

$$M =_{df} \{x \in \mathbb{L} : st(x) > 0\}$$

Zbiór M można też tak opisać $M = \{x \in \mathbb{L} : x \gtrdot 0^*\} \setminus \Omega$; do M należą więc te ograniczone i dodatnie liczby hiperrealne, które nie są nieskończenie małe.

Przyjmujemy $\mathfrak{M}_1 = (M, \oplus, \lessdot)$, gdzie $\oplus$ oraz $\lessdot$ to dodawanie i porządek liczb hiperrealnych zacieśnione do zbioru M. Stąd od razu otrzymujemy, że dodawanie $\oplus$ jest łączne i przemienne, a porządek $\lessdot$ jest liniowy oraz to, że spełniony jest aksjomat $(E3)$.

[35]Opis tej konstrukcji można znaleźć w: [Goldblatt 1998].

W strukturze $\mathfrak{M}_1$ spełniony jest też aksjomat $(E1)$. Istotnie, jeżeli $A, B \in \mathfrak{M}_1$ oraz $A \gtrdot B$, to $st(A) \geqslant st(B) > 0$. Stosując do liczb rzeczywistych $st(A), st(B)$ aksjomat Achimedesa (w wersji dla ciał uporządkowanych) dostajemy, że dla pewnej liczby naturalnej naturalnej n zachodzi $nst(B) > st(A)$. Stąd $nB \gtrdot A$[36].

Niech teraz ε będzie ustaloną dodatnią nieskończenie małą liczbą hiperrealną, niech $A = 3 - \varepsilon$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 2$[37]. Zachodzi $\frac{3-\varepsilon}{2} \lessdot \frac{3}{2}$. Między liczbami $\frac{3-\varepsilon}{2}$ oraz $\frac{3}{2}$ nie leży żadna standardowa liczba wymierna, dlatego gdy $m \neq 3k$ lub $n \neq 2k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, to:

$$\frac{3-\varepsilon}{2} \lessdot \frac{m}{n} \leftrightarrow \frac{3}{2} \lessdot \frac{m}{n} \quad \text{oraz} \quad \frac{3-\varepsilon}{2} \gtrdot \frac{m}{n} \leftrightarrow \frac{3}{2} \gtrdot \frac{m}{n},$$

lub w postaci równoważnej:

$$n(3-\varepsilon) \lessdot m2 \leftrightarrow n3 \lessdot m2 \quad \text{oraz} \quad n(3-\varepsilon) \gtrdot m2 \leftrightarrow n3 \gtrdot m2.$$

Zatem ani $A : B \prec C : D$, ani $A : B \succ C : D$.

Gdy $m = 3k$ i $n = 2k$, to:

$$\frac{3-\varepsilon}{2} \lessdot \frac{m}{n} \wedge \frac{3}{2} = \frac{m}{n},$$

lub w postaci równoważnej:

$$n(3-\varepsilon) \lessdot m2 \wedge n3 = m2,$$

czy jeszcze inaczej:

$$\neg(n(3-\varepsilon) < m2 \rightarrow n3 < m2).$$

Ostatecznie dostajemy:

$$\neg(A : B \prec C : D) \wedge \neg(A : B :: C : D) \wedge \neg(A : B \succ C : D).$$

---

[36] W rozumowaniu tym stosujemy łatwe do sprawdzenie fakty: $\forall x, y \in \mathbb{L}\ [x \lessdot y \rightarrow st(x) \leqslant st(y)]$, $\forall x, y \in \mathbb{L}\ [st(x) < st(y) \rightarrow x \lessdot y]$.

[37] Dla czytelności zapisu pomijamy znak *, który powinien stać przy liczbach naturalnych, a więc ściśle rzecz biorąc winno być: $A = 3^* - \varepsilon, B = 2^*, C = 3^*, D = 2^*$.

Model 2. Przyjmijmy $M = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ oraz:

$$z \lessdot w \leftrightarrow_{df} Re(z) < Re(w) \vee \big(Re(z) = Re(w) \wedge Im(z) < Im(w)\big),$$

gdzie $\mathbb{C}$ to zbiór liczb zespolonych, $Re(z)$ – część rzeczywista liczby z, $Im(z)$ — część urojona liczby z. Przyjmijmy następnie, że $\mathfrak{M}_2 = (M, +, \lessdot)$, gdzie + to „zwykłe" dodawanie liczb zespolonych. Dodawanie w strukturze $\mathfrak{M}_2$ jest łączne i przemienne, porządek $\lessdot$ jest liniowy, ponadto spełnione są aksjomaty $(E1)$ oraz $(E3)$. Przyjmując $A = 3 - i$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 2$ dostajemy:

$$\neg(A : B \prec C : D) \wedge \neg(A : B :: C : D) \wedge \neg(A : B \succ C : D).$$

Mamy bowiem:

$$nA \gtrdot mB \leftrightarrow nC \gtrdot mD, \quad nA \lessdot mB \leftrightarrow nC \lessdot mD,$$

co znaczy, że ani $A : B \prec C : D$, ani $A : B \succ C : D$. Następnie:

$$(2A \lessdot 3B) \wedge 2C = 3D,$$

co znaczy, że $\neg(A : B :: C : D)$.

6. RÓŻNE ZAPISY DEFINICJI V, 7

Definicja V, 5 w różnych komentarzach jest różnie zapisywana[38]. Można jednak pokazać, że przyjmując wyżej podane założenia o strukturze wielkości $\mathfrak{M}$, funkcjonujące w literaturze jej formalne zapisy są równoważne definicji, którą przedstawiliśmy w §1. Sam tekst definicji V, 7 wydaje się natomiast jednoznaczny i autorzy opierający swoje analizy na tekście greckim podają taką samą definicję, jak ta zaprezentowana przez nas w §1[39]. We fragmentach (1) i (6) oraz (3) cytowanych w §3. znajdujemy jednak odmienne zapisy definicji V, 7. Z kolei Mueller dowodzi, że definicję V, 7 w wersji:

$$A : B \succ C : D \leftrightarrow_{df} \exists m, n \in \mathbb{N}\ [nA >_1 mB, nC \leqslant_2 mD],$$

[38]Zob. [Błaszczyk 2006].

[39]Zob. [Beckmann 1967], s. 36, [Knorr 1975], s. 334 , [Mueller 1981], s. 125.

w sposób równoważny można wyrazić formułami:

$$\exists m, n \in \mathbb{N}\ [nA >_1 mB, nC <_2 mD], \tag{V, 7b}$$

$$\exists m, n \in \mathbb{N}[nA \geqslant_1 mB, nC <_2 mD]. \tag{V, 7c}$$

W przedstawionym dowodzie Mueller przywołuje jedynie aksjomat (E1). Pokażemy, że dowód ten nie może być poprawny.

Wróćmy do Modelu 1. Niech będzie $A = 3 + \varepsilon, B = 2,\ C = 3, D = 2$. Wówczas $2A > 3B,\ 2C \leqslant 3D$, co znaczy, że $A : B \succ C : D$ w myśl przyjętej przez nas definicji. Jednocześnie łatwo widać, że nie istnieją takie liczby naturalne n, m, aby było $nA > mB,\ nC < mD$, co znaczy, że $\neg(A : B \succ C : D)$ w myśl definicji zaproponowanych we fragmentach (1), (3) oraz definicji V, 7b. Podobnie dla tych samych wielkości jest $\neg(A : B \succ C : D)$ w myśl definicji z fragmenu (6) oraz definicji V, 7c.

ZAKOŃCZENIE

Niech $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ będzie ciałem liczb rzeczywistych, niech $\mathbb{R}_+$ oznacza zbiór dodatnich liczb rzeczywistych. Struktura $(\mathbb{R}, +, <)$ jest modelem struktury wielkości, tj. $+$ jest działaniem wewnętrznym, łącznym i przemiennym, porządek $<$ jest liniowy, a ponadto spełnione są aksjomaty $(E1) - (E5)$. Relacja proporcji :: jest tu interpretowana jako równość dwóch stosunków, gdzie stosunek jest rozumiany jako iloraz, tzn. $A : B :: C : D$ oznacza $A/B = C/D$, dla $A, B, CD \in \mathbb{R}$. W tym modelu porządek stosunków wiąże się z ośrodkowością osi liczb rzeczywistych, tj.:

$$A/B \succ C/D \leftrightarrow \exists m, n\ [A/B > m/n \geqslant C/D].$$

Porządek stosunków $\succ$ istotnie jest liniowy, bo rzecz sprowadza się do liniowości porządku liczb rzeczywistych $>$[40]. Najprawdopodobniej

[40] Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnego podciała ciała $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$.

właśnie z uwagi na ten model teoria proporcji z Księgi V jest nazywana „abstrakcyjną teorią liczb rzeczywistych”[41]. Powtórzmy zatem, że w Księdze V stosunek wielkości nie jest definiowany, a proporcja jest relacją między czterema wielkości, a nie między dwoma stosunkami. W obydwu modelach podanych w §5. jest tak, że proporcja nie jest równością ilorazów i wcale nie jest oczywiste, jak zinterpretować stosunek wielkości, bo nie jest to po prostu iloraz rozumiany jako dzielenie w ciele niestandardowych liczb rzeczywistych, albo w ciele liczb zespolonych. Z drugiej strony w strukturach tych nie są spełnione wszystkie aksjomaty $(E1)$ – $(E5)$. Stąd otwarte jest pytanie, czy na gruncie aksjomatów teorii wielkości można zdefiniować stosunek tak, aby relacja dana definicją V, 5 była równością stosunków.

LITERATURA

Acerbi Fabio (2003), *Drowning by Multiples. Remarks on the Fifth Book of Euclid's Elements, with Special Emphasis on Prop. 8*, „Archive for History of Exact Sciences” 57, 2003, s. 175–242.

Archimedes, *On the Sphere and Cylinder*, w: [Heath 1912].

Artman Benno (2001), *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, New York 2001.

Beckmann Friedhelm (1967), *Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids*, Archive for History of Exact Sciences IV, 1967, s. 1–144.

pb Błaszczyk Piotr (2007a), *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2007.

Błaszczyk Piotr (2007b), *Eudoxos* versus *Dedekind*, „Filozofia Nauki” 2 (58), 2007, s. 95–113.

Błaszczyk Piotr (2006), *O definicji 5 z Księgi V Elementów Euklidesa*, „Investigationes Linguisticae”, t. XIV, 2006, s. 120–146; http://www.inveling.amu.edu.pl.

[41]Zob. wyżej §3. fragmenty (1) oraz (3).

Bourbaki Nicolas (1966), *Historical Note*, [w:] *Elements of Mathematics. General Topology*, t. I, Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachussetts 1966, s. 406–416.

Czech Józef (1817), *Euklidesa początków geometryi ksiąg ośmioro, toiest sześć pierwszych, iedenasta i dwunasta z dodanemi przypisami dla pożytku młodzi akademickiej wytłumaczone przez Józefa Czecha. Po śmierci autora wydanie drugie z przydaną Trygonometryą Roberta Simsona przełożoną z angielskiego i figurami na miedzi rzniętymi tablic 10*, nakładem i drukiem Iózefa Zawadzkiego Typografa Imperatorskiego Wileńskiego Uniwer., Wilno 1817 (reprint: Wydawnictwo Artystyczne i Filmowe, Warszawa 1981).

Euklides, *Elementy*, w: [Heath 1926].

Grattan-Guiness Ivor (1996), *Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them*, „Historia Mathematica” 23, 1996, s. 355–375.

Goldblatt Robert (1998), *Lectures on the Hyperreals*, Springer, New York 1998.

Hale B. (2000), *Reals by Abstraction*, „Philosophia Mathematica” 8.

Heath Thomas L. (1926), *Euclid. The Thirteen Books of The Elements*, t. I–III, translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Dover, New York 1956 (reprint wydania: Cambridge University Press, Cambridge, 1926).

Heath Thomas L. (1912), *The Works of Archimedes. Edited in Modern Notation with Introductory Chapters by T.L. Heath with a Supplement The Method of Archimedes. Recently Discovered by Heiberg*, Dover, New York 1953 (reprint wydania: Cambridge University Press, Cambridge, 1912).

Joyce David E. (1997), *Euclid's Elements*, http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html.

Knorr Wilbur R. (1975), *The Evolution of the Euclidean Elements*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1975.

Mueller Ian (1981), *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Dover, New York 2006 (reprint wydania: MIT Press, Cambridge, Massachusetts 1981).

Penrose Roger, *Droga do rzeczywistości*, tł J. Przystawa, Prószyńska i S-ka, Warszawa 2004.

van der Waerden Bartel L., *Science Awaking*, tł. A. Dreseden, Noordhoff, Groningen 1954.

SUMMARY

ON EUCLID'S „ELEMENTS" BOOK V, DEFINITION 7

Euclid's *Elements* Book V develops theory of proportion of «geometric magnitudes». Definition V, 5 is the definition of proportion, $A : B :: C : D$, definition V, 7 is the definition of the order of ratios , $A : B \succ C : D$. In commentaries on Book V it is usually supposed, and sometimes even proved, that the order of ratios is a total order, while it is also supposed that «magnitudes of the same kind» obey the Archimedean axiom only, i.e. Euclid's definition V, 4. The purpose of this paper is to show that the linearity of the order of ratios cannot be deduced from the Archimedean axiom; to this end we define a structure of magnitudes $(M, +, <)$ that obeys the Archimedean axiom and show that the conjunction of negations $\neg(A : B \succ C : D)$, $\neg(A : B :: C : D)$, $\neg(A : B \prec C : D)$ is satisfied.