Krzysztof Wójtowicz

Dowód matematyczny – argumentacja czy derywacja? : część I

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 49, 63-80

2011

Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLIX (2011), 63–80

Krzysztof WÓJTOWICZ
Uniwersytet Warszawski, Instytut Filozofii

DOWÓD MATEMATYCZNY — ARGUMENTACJA CZY DERYWACJA? — CZĘŚĆ I

Niniejsza, dwuczęściowa praca[1] poświęcona jest problemowi statusu dowodu matematycznego, i w szczególności próbie zrozumienia zależności między algorytmicznym (formalnym) a semantycznym („ideowym") charakterem dowodów matematycznych. Owe zależności stara się wyjaśnić Azzouni w ramach swojej koncepcji *derivation-indicator view* [Azzouni 2004][2]. Choć w mojej ocenie nie stanowi ona trafnego wyjaśnienia owych zależności, może jednak stanowić ciekawy punkt wyjścia do dyskusji.

Pierwsza część poświęcona jest wprowadzeniu w problematykę i prezentacji koncepcji Azzouniego. Druga część poświęcona jest bardziej szczegółowej analizie problemu — w szczególności też analizie koncepcji Azzouniego.

1. ASPEKTY DOWODÓW MATEMATYCZNYCH

Jest bezzpornym faktem, że w dowodzeniu twierdzeń (w taki sposób, jaki znamy ze zwykłej praktyki matematycznej) podstawową rolę

---

[1] Artykuł został napisany w ramach grantu N N101 094136.

[2] Nie znalazłem zgrabnego polskiego tłumaczenia, dlatego pozostanę przy oryginalnym określeniu.

odgrywa rozumienie pojęć matematycznych i uchwycenie relacji między nimi. Przy opisie dowodów, posługujemy się takimi pojęciami jak idea dowodu, mówimy o tym, że dowód wyjaśnia interesujące nas zjawiska, lub że jedynie wykazuje pewien fakt, pozostawiając uczucie poznawczego niedosytu. Nierzadko zdarza się, że dopiero jakiś nowy dowód już znanego twierdzenia pozwala na zrozumienie wszystkich zależności — powiemy wtedy, że jest głęboki, w przeciwieństwie do wcześniejszych (które określilibyśmy mianem np. siłowych czy trickowych). Matematycy mówią nawet o estetycznych wartościach dowodów. Nie możemy też pomijać zjawisk o charakterze psychologicznym, jakie towarzyszą matematykowi przy dowodzeniu twierdzeń — zarówno przy tworzeniu własnych dowodów, jak i przy śledzeniu cudzych (swoiste „olśnienie", nagłe uchwycenie głównej idei dowodu, przełamanie poznawczej bariery — takie doświadczenia są udziałem każdego, kto ma do czynienia z matematyką). Nieco górnolotnie można powiedzieć, że nierzadko matematycy dokonują swoistej kontemplacji dowodów, dzięki której owe dowody odkrywają pewne ukryte, głębokie znaczenia i treści, idee czy koncepcje. Nie chodzi przy tym o śledzenie szczegółów technicznych (takich jak np. to, czy ciąg oszacowań, przy którym 25 razy zastosowano nierówność Höldera jest poprawny), ale raczej o akty — można rzec — „wglądu w istotę dowodu". W takim obrazie, podstawą dowodzenia (i tym samym transferu prawdy od założeń do twierdzeń) są intelektualne akty — a kluczem do zrozumienia natury dowodu matematycznego jest wyjaśnienie semantyki pojęć matematycznego dyskursu.

Z drugiej jednak strony, istotną cechą dowodów matematycznych jest ich formalizowalność. Znane z praktyki dowody sformułowane są w „naturalnym języku matematycznym", będącym swoistą mieszaniną języka symbolicznego i formalnego — jesteśmy jednak przekonani, że dowody matematyczne dają się sformalizować (a rama takiej formalizacji wyznaczona jest najczęściej przez teorię mnogości[3]). Dowód

[3]Oczywiście, w wielu przypadkach możemy użyć systemów znacznie słabszych, np. różnych wersji arytmetyki, albo wprost zaksjomatyzować interesującą nas teorię. Możemy też zastanawiać się nad teoriokategoryjnymi podstawami dla matematyki. Te szczegóły nie są tu istotne — dla naszej dyskusji ważny jest sam fakt istnienia formalizacji.

matematyczny (w swej wyidealizowanej wersji) w takim ujęciu jest właśnie ciągiem napisów, skonstruowanym zgodnie z pewnymi formalnymi regułami. W systemach sformalizowanych mamy zawsze daną listę aksjomatów (prawd pierwotnych) oraz reguł wnioskowania, za pomocą których możemy wyprowadzać wnioski z danego zbioru zdań. Aksjomaty mają oczywiście swoją interpretację, ale można na nie patrzeć również jak na czysto formalne napisy, abstrahując od ich treści[4]. Zamiast mówić o prawdach pierwotnych, będziemy mówić o napisach wyjściowych, zaś o regułach wnioskowania będziemy myśleć jako o regułach tworzenia nowych napisów (a nie jako o regułach „transmisji prawdy od założeń do wniosków"). Dowody matematyczne, sformalizowane np. w teorii mnogości możemy traktować jako ciągi takich napisów, utworzonych zgodnie z pewnymi czysto formalnymi regułami. Możliwe jest wówczas ich zakodowanie w taki sposób, aby mogły stać się przedmiotem komputerowej obróbki (w szczególności możemy myśleć wówczas o komputerowym dowodzeniu twierdzeń). Rzecz jasna, komputer nie wiąże z przetwarzanymi przez siebie symbolami (na poziomie maszynowym reprezentowanymi przez ciągi zer i jedynek) żadnych treści[5].

Rozwój logiki formalnej dostarczył silnych narzędzi do analizy wnioskowań matematycznych, umożliwiając stworzenie ogólnego modelu (i zrozumienie istotnych aspektów tych wnioskowań). W szczególności możliwe było sformułowanie ścisłej definicji dowodu matematycznego, jako ciągu formuł spełniających pewne warunki formalne[6].

---

[4]Np. aksjomat istnienia zbioru pustego to napis $\exists x \forall y(\neg y \in x)$. Aksjomat istnienia sumy zbiorów to napis: $\forall x \forall y \exists z \forall t(t \in z \Leftrightarrow (t \in x \vee t \in y))$, etc.

[5]Komputer sprawdzający poprawność dowodu formalnego nie wiąże z symbolem „$\Rightarrow$" żadnych intuicji; podobnie, nie „zastanawia się" nad tym, jaka jest interpretacja znaków „$\exists$" czy „$\forall$" — „wie" natomiast, że np. zamiast napisu „$\neg\forall\neg x$" może wstawić napis „$\exists x$".

[6]Znana z elementarnego kursu rachunku zdań definicja dowodu formuły β na podstawie założeń A wygląda następująco: dowód to skończony ciąg formuł $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, taki, że $\alpha_n = \beta$, oraz dla każdej z formuł zachodzi jeden z dwóch faktów: (1) $\alpha_k \in A$ lub (2) istnieją formuły α_i, α_j, takie, że $i, j < k$ oraz α_j jest postaci $\alpha_i \Rightarrow \alpha_k$ (czyli albo korzystamy z założeń, albo z reguły odrywania). Jest to definicja czysto formalna, i przy sprawdzaniu czy dany ciąg formuł klasycznego rachunku zdań jest dowodem formalnym, w ogóle nie musimy zastanawiać się nad tym, co właściwie znaczy sym-

O tym czy dowód jest poprawny decydują wyłącznie kryteria o charakterze syntaktycznym[7]. Przy analizie teoriodowodowej abstrahujemy od problemu interpretacji, czy rozumienia treści dowodu, traktując go czysto formalnie. Nie interesują nas przy tym ograniczenia praktyczne (wiążące się np. z długością naszego życia). Stwierdzenie, że najkrótszy dowód pewnego twierdzenia α w pewnej teorii T ma długość $10^{10000000}$ ma oczywiście charakter czysto teoretyczny — mowa jest tutaj jedynie o (potencjalnym) istnieniu takiego dowodu, a nie że taki dowód został faktycznie kiedyś przez kogoś sformułowany (ani tym bardziej, że możliwa jest jego graficzna reprezentacja w postaci wydruku). Nie interesuje nas również to, czy dowód formalny mógłby być faktycznie przez kogoś przeprowadzony, ani nawet to, czy matematyk, któremu taki dowód zostałby zaprezentowany, poczułby się przekonany. Aspekty semantyczne są tu nieobecne.

Traktowanie dowodu matematycznego jako dowodu formalnego jest odległe od praktyki matematycznej. Dowody, z jakimi się spotykamy w praktyce (na referatach czy w publikacjach) mają oczywiście ścisły i precyzyjny charakter, ale nie są dowodami formalnymi w takim sensie, jak to rozumie teoria dowodu[8]. Żaden matematyk nie pisze swoich prac w postaci ciągu formuł języka formalnego (np. języka ZFC)[9]. Byłoby to z praktycznego punktu widzenia niewykonalne (zastanówmy się, jaką długość miałyby dowody, które w swojej zwykłej wersji mają kilkadziesiąt — czy nawet kilkaset stron!) — ale przede

bol „$\Rightarrow$". W przypadku innych systemów formalnych definicja będzie inna (niekiedy dowodem może być drzewo, niekiedy ów ciąg może być ciągiem pozaskończonym) — jednak zasadnicza idea jest wspólna.

[7]Kiedy definiujemy ów język formalny, musimy opisać jednoznacznie klasę poprawnych wyrażeń, klasę aksjomatów i zestaw dopuszczalnych reguł dowodzenia.

[8]Teoria dowodu nie stawia zresztą sobie zadania, aby opisać praktykę matematyczną — jej przedmiotem zainteresowania są dowody w teoriach sformalizowanych, a nie opis tego, jak dowodzą twierdzenia specjaliści z zakresu np. topologii różniczkowej (np. jak wygląda dowód hipotezy Poincare podany przez Perelmana — i czy jest poprawny).

[9]Mam tu na myśli zwykłą praktykę matematyczną: matematyków zajmujących się np. teorią równań różniczkowych, kombinatoryką, topologią etc. W przypadku badań dotyczących automatycznego dowodzenia twierdzeń oczywiście taka formalizacja jest dokonywana.

wszystkim zbędne. Z dokonaniem takiej formalizacji nie wiązałaby się żadna korzyść poznawcza; co więcej z punktu widzenia komunikowania treści matematycznych, taka nadmierna formalizacja byłaby wręcz szkodliwa. Można przypuszczać, że żaden specjalista od np. topologii różniczkowej nie byłby w stanie rozpoznać nawet swojego własnego dowodu po „przetłumaczeniu" go na język ZFC[10]. Z punktu widzenia owego specjalisty fakt, że jakiś dowód geometryczny (np. dowód hipotezy Poincare) został formalnie zrekonstruowany w ramach ZFC nie jest faktem interesującym — specjalista ów co najwyżej pokiwa głową w zadumie, że oto ludzie (być może doda tu kpiąco: o mentalności buchalterów a nie matematyków...) tracą energię na przerabianie dobrych dowodów, zamiast zająć się rozwiązywaniem problemów, tworzeniem nowych idei, wymyślaniem nowych technik i pojęć. Formalna rekonstrukcja dowodów leży poza zasięgiem zainteresowania topologii różniczkowej. Gdyby nawet owym topologom oznajmiono, że mimo wieloletnich prób nie udało się podać formalizacji dowodu hipotezy Poincare w języku ZFC, to nie uznaliby tego faktu za kłopotliwy z punktu widzenia ich dyscypliny. Co więcej, nawet gdyby się okazało, że prawdopodobnie taka formalizacja nie jest możliwa (albo że komputerowa weryfikacja dowodu jest praktycznie niewykonalna), specjaliści bynajmniej nie uznaliby tego faktu za katastrofalny. Powiedzieliby raczej, że z punktu widzenia topologii różniczkowej problem jest rozwiązany, a dowód dobry — a to, że nie da się go zrekonstruować w pewnej określonej notacji to już nie ich problem. Zadaniem topologii różniczkowej jest bowiem zdobywanie nowej wiedzy na temat rozmaitości różniczkowalnych, a nie zapisywanie (w pełni satysfakcjonujących) dowodów w sztucznej notacji wymyślonej przez logików[11].

[10]Z jego punktu widzenia, tłumaczenie dowodu na język ZFC przypominałoby tłumaczenie na chiński — zidentyfikowanie odpowiednich miejsc pierwotnego dowodu w owym ciągu symboli wymagałoby ogromnego (i zbędnego...) wysiłku.

[11]Jako ciekawostkę można tu przytoczyć podaną przez Mathiasa w pracy [Mathias 2002] rekonstrukcję definicji liczby 1 w systemie Bourbakiego. Okazuje się, że stosowny term miałby długość 4 523 659 424 929 znaków. Nic więc dziwnego, że idea pełnego formalizowania rozumowań matematycznych napotyka opór matematyków...

Mamy zatem niejako dwie wizje dowodów matematycznych, które mogą być punktem wyjścia dla dalszych analiz:

(1) Dowodzenie matematyczne stanowi swoistą aktywność intelektualną, która nie jest skrępowana warunkami czysto formalnymi. Sama warstwa formalna (czy nawet językowa) jest mniej istotna. Kluczowe dla matematyki jest przekazywanie pewnych treści, idei, intuicji — a nie formalizacja. Dowodzenie stanowi raczej ciąg aktów intelektualnych, a nie przekształceń formalnych. Można powiedzieć, że z tego punktu widzenia, dowodzenie to operacje na pojęciach (zaś aspekty semantyczne mają charakter nieredukowalny)[12].

(2) Dowód matematyczny to formalny konstrukt, którego semantyczne aspekty są nieistotne — liczy się tylko zgodność z formalnymi regułami. Fakt, że matematycy wiążą z owymi dowodami pewne treści jest pewnym (być może skądinąd ciekawym) zjawiskiem psychologicznym, jednak nie ma ono żadnego znaczenia w dyskusji filozoficznej. W takim ujęciu winniśmy traktować dowód jako operację na niezinterpretowanych symbolach.

Historycznie pierwotne jest stanowisko (1), jednak w matematyce nowożytnej nastąpiła swoista ewolucja od rozumienia (1) w kierunku rozumienia (2). W kolejnym akapicie krótko przedstawię pewne wątki historyczne, co pozwoli na lepsze ukazanie problemu[13].

[12] W ostatnich latach ukazuje się coraz więcej prac, które podejmują problem dowodów matematycznych z tego właśnie punktu widzenia (a nie z punktu widzenia formalnej teorii dowodu), por. np. [Panza 2003], [Bassler 2006], [Rav 1999], [Rav 2007], [Dawson 2006], [Fallis 2003]. Zaś za swoistego prekursora tego sposobu myślenia można uznać Lakatosa i jego klasyczne już dziś *Dowody i refutacje* ([Lakatos 1976]).

[13] Nie jest moim celem historyczna prezentacja. Bardziej szczegółowe omówienie owej ewolucji historycznej (z uwzględnieniem roli Kartezjusza, Berkeley'a, Peacocka, Heinego, Thomae, Fregego i innych myślicieli), Czytelnik znajdzie w [Detlefsen 2005], a także w [Wójtowicz 2007a, 2007b].

2. *WĄTKI HISTORYCZNE*

Paradygmatycznym reprezentantem poglądu (1) był Kartezjusz, który uważał metodę matematyczną za swoisty wzór racjonalnego myślenia, bynajmniej nie traktując jednak rozumowań matematycznych czysto formalnie. Podkreślał, że podstawą naszego poznania jest zdolność do ujmowania w czysto intelektualnych aktach pewnych podstawowych prawd w jasny i wyraźny sposób[14]. Jasne i wyraźne widzenie jako kryterium wiedzy stosuje się oczywiście również do matematyki. Odwołania do intuicji występują jednak nie tylko w przypadku uznawania podstawowych prawd; musimy z niej korzystać także w rozumowaniach, intuicyjnie postrzegając prawomocność każdego kroku dowodowego: „owa oczywistość i pewność intuicji wymagana jest nie tylko dla samych wypowiedzi, ale także dla jakichkolwiek rozumowań... Zdania [...]poznaje się [...]już to przy pomocy intuicji, już to przy pomocy dedukcji; same zaś pierwsze zasady tylko przy pomocy intuicji; natomiast ich odległe wnioski jedynie przy pomocy dedukcji" [Descartes 1958, 13-14]. Z punktu widzenia koncepcji Kartezjusza, rozumowanie matematyczne stanowi proces treściowy, oparty na naszym rozumieniu pojęć, a nie na formalnych własnościach systemów symbolicznych. Zdaniem Kartezjusza (i zwolenników poglądu treściowego) o prawomocności dowodu decyduje więc — mówiąc skrótowo — treść, a nie forma.

Jednak ten sposób myślenia w matematyce nowożytnej stopniowo zaczął ustępować nowemu ujęciu, w myśl którego wyznacznikiem poprawności dowodu przestawało być jego intuicyjne rozumienie, a stawała się nim zgodność z pewnymi określonymi formalnie regułami. Ten pogląd w jasny sposób wyartykułował (i w pewnym stopniu także wcielił w czyn) Moritz Pasch (nazywany bywa on „ojcem ścisłości

[14]Podstawowe czynności naszego umysłu, za pomocą których „możemy nie obawiając się omyłki dojść do poznania rzeczy" [Descartes 1958, 12] to intuicja i dedukcja. Intuicję Kartezjusz określa jako „nie zmienne świadectwo zmysłów, lub zwodniczy sąd źle tworzącej wyobraźni, lecz tak łatwe i wyraźne pojęcie umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy, lub, co na jedno wychodzi, pojęcie niewątpliwe umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy" [Descartes 1958, 12].

w geometrii")[15]. W pracy *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882) Pasch podał aksjomatyczne sformułowanie geometrii i sformułował jasne kryterium metodologiczne dotyczące poprawności dowodów geometrycznych:

> Jeśli geometria ma naprawdę być nauką dedukcyjną, proces wnioskowania musi we wszystkich fragmentach być niezależny od znaczenia pojęć geometrycznych, podobnie jak musi być niezależny od diagramów; pod uwagę mogą być brane jedynie relacje wyrażane w twierdzeniach i definicjach. W czasie wnioskowania jest użyteczne i dopuszczalne, ale nie konieczne myślenie o znaczeniach terminów; faktycznie, jeśli jest to konieczne, to w ten sposób widoczna staje się niepoprawność dowodu [Pasch 1882, 98] (cyt. za [Detlefsen 2005, 250-251]).

Warunkiem pełnej ścisłości dowodu jest więc uwolnienie go od wszelkich elementów wyobrażeniowych, poglądowych, co stanowi postulat utrzymany w całkowicie „antykartezjańskim" duchu. Z punktu widzenia ścisłości dowodu, „treściowa kontrola", oparta na odwołaniu się do intuicji, nie ma najmniejszego znaczenia. Dowód geometryczny możemy traktować w czysto formalny sposób, podobnie jak przekształcanie wyrażeń algebraicznych zgodnie z pewnymi regułami. Zaś fakt, że w jakimś dowodzie musimy odwołać się do intuicji, świadczy po prostu o tym, że jest tam luka.

Grundlagen der Geometrie (1899) Hilberta utrzymana jest w duchu realizacji sformułowanego przez Pascha programu formalizacji dowodów geometrycznych i uwolnienia ich od elementów intuicyjnych i wyobrażeniowych. Hilbert posługiwał się technikami geometrii analitycznej, interpretując terminy geometryczne (takie jak prosta, punkt, płaszczyzna etc.) w terminach liczb. W *Grundlagen der Geometrie* Hilbert podał model nie tylko dla klasycznej geometrii, ale także dla szeregu jej wariantów (w których odrzucano poszczególne aksjomaty geometryczne). W ten sposób wykazał, iż aksjomaty te są od siebie

[15] Ważną rolę odegrał tu rozwój algebry, w której dokonywano czysto symbolicznych operacji na wyrażeniach matematycznych (wykorzystując np. jednostkę urojoną, której nie nadawano realistycznej interpretacji).

niezależne. Oczywiście w takim ujęciu nie jest konieczna żadna wizualizacja, ani odwoływanie się do intuicyjnych wyobrażeń. Intuicja może odgrywać rolę pomocniczą, heurystyczną, inspirującą — ale nie ma znaczenia z punktu widzenia samego problemu poprawności dowodu. Geometria w takim ujęciu stać się miała nauką formalną i ścisłą — a gwarancją dla tej ścisłości miało być właśnie sformułowanie katalogu reguł dowodowych o czysto syntaktycznym charakterze. Usuwają one wątpliwości i ewentualne luki dowodowe, pozwalając na uzyskanie pewności[16]. Ten postulat poszukiwania ścisłości i pewności (będące — można rzec — wyrazem swoistej tęsknoty za punktem Archimedesowym w matematyce) stanowi dla Hilberta motywację przy formułowaniu jego słynnego programu — programu poszukiwania możliwie bezpiecznych i niekontrowersyjnych podstaw dla matematyki.

O procesie odchodzenia od kartezjańskiego, „treściowego" ujęcia dowodu matematycznego tak pisał Hahn:

> Ponieważ intuicja okazała się zwodnicza w tak wielu przypadkach i ponieważ twierdzenia akceptowane na mocy intuicji okazywały się fałszywe (na mocy wnioskowania logicznego), matematycy stawali się coraz bardziej sceptyczni w odniesieniu do intuicji. Uznali, że nie jest rzeczą bezpieczną opieranie jakiegokolwiek stwierdzenia matematycznego [...] na intuicyjnych przekonaniach. Pojawiło się dążenie do wyeliminowania intuicji z rozumowań matematycznych i całkowitej formalizacji matematyki. [...] [K]ażde nowe pojęcie matematyczne miało być wprowadzane przez czysto logiczne definicje; każdy matematyczny dowód przeprowadzany za pomocą czysto logicznych środków [Hahn 1980, 93].

Dziś przekonanie, iż matematyka poddaje się formalizacji (i że — co więcej — owa formalizacja stanowi niejako gwarancję metodolo-

[16] Nie znaczy to jednak bynajmniej, że w takim ujęciu matematyka ma zostać sprowadzona do czysto formalnej, pozbawionej interpretacji gry symboli. Nie bierze się przecież ona znikąd, odzwierciedla ona reguły. Hilbert podkreśla, że reguły naszego myślenia tworzą system, który jesteśmy w stanie odkryć i precyzyjnie opisać. Zadaniem badań logicznych ma być „stworzenie protokołu reguł, zgodnie z którymi przebiega nasze myślenie. Myślenie, tak się składa, przebiega równolegle do mówienia i pisania: tworzymy wypowiedzi i umieszczamy je jedną za drugą." [Hilbert 1928, 475].

gicznej poprawności) wydawać się nam może oczywiste, ale przecież pogląd ten jest w refleksji nad matematyką obecny od niezbyt dawna[17]. Zauważmy też, że nasze przekonanie o zasadniczej formalizowalności dowodów matematycznych opiera się na swoistej indukcji przyrodniczej: wiele dowodów dało się sformalizować, a więc jesteśmy przekonani, że akceptowalne w matematyce metody argumentacyjne nie wykraczają poza np. ZFC[18]. Jest to jednak — do pewnego stopnia — akt wiary, a pytanie o zależności między realnymi dowodami matematycznymi, a ich wyidealizowanymi wersjami pozostaje aktualne.

3. DOWODY REALNE A IDEALNE

Nie ulega wątpliwości, że również w dowodach realnych obecny jest element czysto formalny (kiedy np. konieczne jest przeprowadzenie kilku stron żmudnych przekształceń algebraicznych). Z drugiej jednak strony nie ulega wątpliwości, że dowody realne nie są sformalizowane, zaś eksperci wydają pozytywny werdykt akceptując dany dowód kiedy poczują się przekonani, a nie kiedy zobaczą w pełni sformalizowaną wersję owego dowodu. Kluczowy jest tu moment zrozumienia idei, przewodniego wątku, zasadniczej metody dowodu i akceptacja owego dowodu (w szczególności też poszczególnych kroków dowodu) w akcie intelektualnym. Wszak sformułowanie językowe, uzupełnianie szczegółów dowodu często przychodzi znacznie później, u źródła mamy bowiem ów przebłysk idei, a nie badanie formalnych ciągów

[17]Barwise pisze iż „pomysł, aby rozumowanie mogło zostać w jakiś sposób zredukowane do postaci czysto syntaktycznej w pewnym formalnym, sztucznie skonstruowanym języku jest stosunkowo nowym pomysłem w historii matematyki. Wyrasta w programu Hilberta. Dowody matematyczne istniały przez tysiące lat zanim pojawili się logicy i zmatematyzowali to pojęcie.... O żadnym systemie nie można powiedzieć, że to właśnie on jest tym rzeczywistym pojęciem dowodu, ponieważ istnieją niekończące się warianty... One wszystkie nie mogą być rzeczywistym pojęciem dowodu... istnieją dobre dowody, które nie są modelowane w żadnym współczesnym systemie dedukcyjnym". [Barwise 1989], (cytat za [Rav 2007, 302]).

[18]Należy tu jednak dodać, że także współcześnie (zwłaszcza w przypadku matematyki stosowanej) można wskazać sytuacje, kiedy posługujemy się narzędziami w sposób — mówiąc żartobliwie — nielegalny. Przykładem może być funkcja δ Diraca, którą fizycy posługiwali się zanim została opracowana jej ścisła teoria matematyczna.

symboli. Często przecież zdarza się, że matematyk już wie, jak ma wyglądać dowód, jaki jest jego schemat, i jest przekonany o poprawności owego dowodu — choć być może jeszcze nie jest w stanie go zapisać, i czeka go żmudne zadanie uzupełniania szczegółów (wtórne w stosunku do uchwycenia głównej idei). Pojawia się pytanie, na jakiej podstawie matematyk podejmuje decyzję o uznaniu dowodu za dobry — i jaki związek ma ta jego decyzja z istnieniem (potencjalnej) sformalizowanej wersji dowodu?

W procesie dowodzenia kluczowe są przejścia od akceptacji zdania α do akceptacji kolejnego zdania β[19]. Nie ulega przy tym wątpliwości, że na poziomie naszych świadomych aktów intelektualnych nie rozkładamy takich przejść na elementarne operacje w rachunku formalnym — matematyk takiej formalizacji najczęściej nie zna, a niekiedy w ogóle nie ma świadomości jej (potencjalnego) istnienia. Stosunkowo proste przejście dowodowe, które matematyk uzna za zasadne (śledząc dowód hipotezy Poincare'go), po sformalizowaniu może zająć 20 stron przekształceń formuł ZFC. Akceptacja nowego zdania nie ma przy tym na ogół prostej liniowej struktury: owo przejście do nowego przekonania β nie następuje w wyniku analizy samego tylko poprzednika α, ale raczej w wyniku swoistego całościowego oglądu wiedzy w danym momencie, w której zdanie α stanowi jedynie jeden z elementów. Rolę odgrywa tu więc — mówiąc swobodnie — cały „pakiet" przekonań matematyka na temat przedmiotu jego badań. Owo przejście od α do β odbywa się w kontekście pewnej „wiedzy tła".

Z czysto formalnego punktu widzenia, opis owej „wiedzy tła" zdaje się być klarowny: składa się ona po prostu z przyjętych na początku aksjomatów i już udowodnionych zdań. Nie opisuje to jednak realnych procesów dowodzenia; w każdym razie nie w planie psychologicznym. Z kolei w ujęciu intuicyjnym („kartezjańskim") w dowodzeniu mamy do czynienia z aktami intelektualnymi, które dają nam wgląd w prawdziwość zdań matematycznych (i prawomocność kroków we wnioskowaniu). Naturalne staje się pytanie, na jakim poziomie pojawia się taka zdolność, jakiego typu akty są faktycznie elementarne (niereduko-

[19]Niektóre z takich szczególnie ważnych miejsc podkreślamy w dowodach używając zwrotów „stąd", „a zatem" etc.

walne), a jakie dają się dalej rozłożyć na „czynniki pierwsze". W praktyce matematycznej stosunkowo skomplikowane przejścia dowodowe są traktowane jako prawomocne (przy czym warunkiem jest pewne obycie z przedmiotem badań). Pojawia się problem, co leży u podłoża tego typu przejść i co jest gwarantem ich prawomocności? Problem ma przynajmniej dwa aspekty: indywidualny (decyzje pojedynczych matematyków) i społeczny (wspólne reguły dla całej społeczności matematyków). Z punktu widzenia kartezjańskiego, u podłoża owych elementarnych przejść leżałaby pewna zdolność do intelektualnego ujęcia owych operacji. Z punktu widzenia skrajnego formalizmu, u podłoża owych przejść leżą czysto formalne reguły (można powiedzieć: formalne reguły przekształcania ciągów symboli — w ostatecznym rozrachunku ciągów zerojedynkowych, bo każdy skończony ciąg symboli daje się tak zakodować). Jednak każde z tych wyjaśnień pomija pewne ważne aspekty: nie ulega przecież wątpliwości, że dokonujemy przekształceń formalnych (a więc jakieś ziarno prawdy tkwi w formalizmie), ale nie ulega również wątpliwości, że owe reguły formalne zostały przyjęte w sposób niearbitralny, ale zgodnie z pewnym rozumieniem reguł (a więc ziarno prawdy tkwi w ujęciu treściowym).

Ciekawa próba wyjaśnienia relacji między tymi aspektami dowodów została podjęta przez Azzouniego w pracy ([Azzouni 2004]); jego koncepcji poświęcony jest kolejny paragraf.

4. KONCEPCJA AZZOUNIEGO

Azzouni wychodzi od obserwacji, że matematycy zgadzają się zasadniczo co do poprawności i prawomocności dowodów, pomimo iż ich w swojej praktyce nie formalizują. Pojawia się więc naturalne pytanie, jakie jest źródło owej zgodności.

Jedno z możliwych ujęć sięga do wyjaśnień socjologizujących, w myśl których dowód matematyczny ma charakter społecznego konstruktu, a warunki społeczno-kulturowe determinują, kiedy dowód uznawany jest za przekonujący. Owa zgodność matematyków ma zatem swoje źródło w swoistej umowie społecznej. Z punktu widzenia filozofii postmodernistycznej[20] dowód matematyczny to zestaw technik retorycznych, służących do zwycięstwa w dyskusji i przekonania do swoich racji pozostałych członków komunikacyjnej wspólnoty. Dowód stanowi więc skuteczną aplikację pewnych akceptowanych w danej społeczności technik argumentacyjnych, stanowi pewien czysto kulturowy konstrukt, który — co do istoty — nie różni się od technik perswazyjnych stosowanych np. w kulturach plemiennych. Z tego punktu widzenia ewentualna formalizowalność dowodu nie ma znaczenia — liczy się bowiem jedynie retoryczna skuteczność.

Przedstawiając ów pogląd w sposób — dla wyrazistości — nieco wyostrzony, akceptacja danych technik dowodowych jest wyrazem hegemonii pewnych grup społecznych (np. biali heteroseksualni mężczyźni, członkowie klasy średniej, właściciele nieruchomości, osoby jedzące wołowinę, wychowankowie MIT lub UCLA, osoby wyznania katolickiego, cykliści etc.) i winna być wyjaśniana w terminach ekskluzywistycznego dyskursu: osoby, które wierzą w to, że $2 + 2 = 5$ są poddane opresji i w brutalny sposób wykluczani ze wspólnoty, zaś ich (wszak równie uprawniony jak każdy inny) punkt widzenia nie ma szans na przebicie się w zideologizowanym dyskursie. Akceptacja takich a nie innych dowodów ma charakter czysto socjologiczny, podobnie jak moda. W tej akurat chwili panuje moda na dowodzenie w pewnym stylu, ale równie dobrze za 30 lat może zapanować moda na dowody np. czysto rysunkowe albo uwzględniające stosowne parytety[21].

Azzouni odrzuca wyjaśnienia socjologizujące. Jego zdaniem, społeczna zgoda matematyków dotycząca dowodów ma głębsze przyczyny, niż tylko społeczne: w tle tej zgody leży pewien swoiście rozumiany idealny dowód. Główna teza Azzouniego głosi bowiem, iż każdy realny dowód stanowi swoisty wskaźnik (*indicator*) tego, że

[20]Traktuję ten nurt zbiorczo, zaliczając do niego również np. mocny program socjologii wiedzy zaaplikowany do matematyki. Być może specjalista w tej dziedzinie uzna to za uproszczenie — ale przecież skoro każdy dyskurs jest równie dobry jak każdy inny, to i dyskurs posługujący się tym uproszczeniem też...

[21]Pojawia się pytanie, skąd biorą się tego typu pomysły w odniesieniu do matematyki. Moim zdaniem nie wynikają one z pogłębionej refleksji nad matematyką, ale raczej z klimatu intelektualnego, który zachęca do rezygnacji z poszukiwania racjonalnych wyjaśnień. (Analizie tych zagadnień poświęcona jest praca [Wójtowicz 2009]).

w pewnym systemie algorytmicznym istnieje stosowna procedura algorytmiczna (obliczeniowa) stanowiąca ową idealną wersję dowodu (*derivation*) — stąd też bierze się określenie jego koncepcji jako *derivation-indicator view*. Azzouni pisze więc

> jeśli dowody w gruncie rzeczy stanowią narzędzia, za pomocą których matematycy przekonują siebie nawzajem o istnieniu takiej czy innej mechanicznie weryfikowalnej derywacji, fakt ten wystarczy do wyjaśnienia, dlaczego matematycy zgadzają się ze sobą co do tego, kiedy pewien dowód faktycznie dowodzi pewnego twierdzenia [Azzouni 2004, 84].

Można powiedzieć, że realny dowód niejako odkrywa fakt istnienia takiej derywacji „w takim czy innym nieformalnie określonym systemie algorytmicznym" [Azzouni 2004, 85]. Sam opis owego systemu nie musi być sformalizowany, natomiast ów system umożliwia mechaniczne rozpoznawanie dowodów.

Owe derywacje nie muszą być związane z jakimś z góry ustalonym systemem formalnym: „'systemy algorytmiczne' nie są ograniczone do pewnej wyróżnionej logiki... ani nawet to pewnego ustalonego języka.... To, co jest istotne jest to, że 'dowody', jakkolwiek by nie były rozumiane, są (w zasadzie) mechanicznie rozpoznawalne" [Azzouni 2004, 86]. Praktyka matematyczna może więc bazować (nawet jeśli dzieje się to w sposób nieuświadomiony) na różnego typu systemach algorytmicznych w tle, zaś owe systemy mogą być — stosownie do potrzeb — wzbogacane i rozwijane. Tu Azzouni formułuje warunek, iż jedynym logicznym ograniczeniem dotyczącym owych wzbogacanych systemów jest warunek zachowawczości, tj. zachowane mają być wyniki uzyskane we wcześniejszych systemach. Jest to warunek dość oczywisty: skoro bowiem w pewnym systemie S udowodnione zostało α, to zmodyfikowany (wzmocniony) system S^* powinien nadal umożliwiać udowodnienie twierdzenia α. Wzmacnianie, uogólnianie, łączenie ze sobą różnych teorii matematycznych jest kluczowe dla rozwoju matematyki, Azzouni pisze więc „centralną rolę w praktyce matematycznej odgrywa łączenie ze sobą tych algorytmicznych systemów — i ten fakt wyjaśnia wiele zjawisk znanych z praktyki, które w innym wypadku wydawałyby się wymagać odniesienia do obiektów matematycznych (np. liczb)" [Azzouni 2004, 86-87]. Wyjaśnieniem i gwarantem dla współdziałania różnych teorii matematycznych są więc owe procedury algorytmiczne w tle, a nie założenie o istnieniu wspólnego przedmiotu odniesienia w postaci obiektów abstrakcyjnych[22].

Na realne dowody matematyczne należy zatem patrzeć jako na argumenty, które wskazują na istnienie derywacji [Azzouni 2004, 88]. Dowód dlatego jest przekonujący dla innych matematyków, że „w tle" czeka owa derywacja. To właśnie ona jest uprawdziwiaczem (*truthmaker*) dla prawdziwości zdań matematycznych (a nie np. konfiguracja abstrakcyjnych bytów). Jak sam pisze „to derywacja stanowi szkielet (ciała) dowodu" [Azzouni 2004, 95].

Azzouni oczywiście zdaje sobie sprawę, że matematycy w praktyce nigdy nie formalizują dowodów; co więcej, zaprezentowanie takiego sformalizowanego dowodu nie stanowiłoby na ogół żadnego poznawczego zysku z punktu widzenia konkretnej dyscypliny matematycznej. Specjalista od np. analizy zespolonej nie dowie się nic ciekawego analizując sformalizowaną wersję dowodu jakiegokolwiek twierdzenia (i z jego punktu widzenia takie analizy byłyby wręcz stratą czasu). Ten fakt Azzouni bierze pod uwagę, zarazem stara się jednak uwzględnić postulat formalizmu, zgodnie z którym dowody mają charakter potencjalnie formalny. W świetle uwag dotyczących historycznej ewolucji rozumienia dowodu matematycznego, można powiedzieć, że Azzouni próbuje wyjaśnić ową ewolucję jako swoiste uświadamianie sobie matematyków, co leży w tle ich działań. Ten proces uświadamiania polega bowiem w gruncie rzeczy na odkrywaniu owego systemu algorytmicznego w tle.

Koncepcja Azzouniego stanowi więc próbę wyjaśnienia natury „mostu Hilberta", łączącego królestwo obiektów syntaktycznych z królestwem nieformalnego dyskursu matematycznego[23]. Krytycznej ana-

[22]Azzouni jest antyrealistą, a więc nie chce odwoływać się do interpretacji, w myśl których o prawdziwości zdań matematycznych decyduje zgodność z pozamatematyczną rzeczywistością.

[23]Rav pisze o „moście Hilberta": „Łączy dwa królestwa: formalne królestwo obiektów syntaktycznych... z królestwem nieformalnego dyskursu matematycznego" [Rav 1999, 31].

lizie koncepcji Azzouniego i dyskusji pewnych problemów związanych z relacją między formalnym a nieformalnym aspektem dowodzenia poświęcona jest druga część artykułu.

LITERATURA

Azzouni, J.

[2004] „The derivation-indicator view of mathematical practice", *Philosophia Mathematica*, 3 (12), s. 81–105.

Barwise, J.

[1989] „Mathematical proofs of computer system correctness", *Notices of the American Mathematical Society* 36, s. 844–851.

Bassler, O. B.

[2006] „The surveyability of mathematical proof: a historical perspective", *Synthese*, 148, s. 99–133.

Dawson, J. W., Jr..

[2006] „Why do mathematicians re–prove theorems", *Philosophia Mathematica*, III, (14), s. 269–286.

Descartes, R.

[1958] *Prawidła kierowania umysłem; poszukiwanie prawdy przez światło przyrodzone rozumu.* PWN, Warszawa.

Detlefsen, M..

[2005] „Formalism", [w:] Shapiro S. (red.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford, s. 236–317.

Fallis, D.

[2003] „Intentional gaps in mathematical proofs", *Synthese*, 134, s. 45–69.

Hahn, H.

[1980] *Empiricism, Logic and Mathematics*, D.Reidel, Dordrecht, London, Boston.

Hilbert, D.

[1928] „Die Grundlagen der Mathematik„ *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 6; s. 65–85. Angielskie tłumaczenie w: Van Heijenoort, J. *Form Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1967, s. 464–479.

Lakatos, I.

[1976] *Proofs and refutations. The Logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press, Cambridge. Przekład polski (na podstawie wydania z 1999, red. Worral J., Zahar E.): *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, tłum. Kozłowski M., Lipszyc K., Tikkun, Warszawa, 2005.

Mathias, A. R. D..

[2002] „A term of length 4 523 659 424 929", *Synthese*, 133, s. 75–86.

Pasch, M.

[1882] *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig.

Panza, M.

[2003] „Mathematical proofs", *Synthese*, 134, s. 119–158.

Rav, Y..

[1999] „Why do we prove theorems?" *Philosophia Mathematica*, 7, 1999, s. 5–41.

[2007] „A critique of a formalist–mechanist version of the justification of arguments in mathematicians' proof practices", *Philosophia Mathematica* (III) 15, s. 291—-320.

Wójtowicz, K.

[2007a] „Dowód matematyczny z punktu widzenia formalizmu matematycznego. I", *Roczniki Filozoficzne*, LV, (2), s. 123–138.

[2007b] „Dowód matematyczny z punktu widzenia formalizmu matematycznego. II", *Roczniki Filozoficzne*, LV, (2), s. 139–153.

[2009] „Filozofia matematyki a filozoficzna kultura masowa", [w:] *Nauka a kultura masowa*, Heller M., Mączka J., Polak P., Szczerbińska–Polak M. (red.), *Biblos*, Tarnów.

SUMMARY

MATHEMATICAL PROOF — ARGUMENTATION OR DERIVATION? — PART I

The article is devoted to the problem of status of mathematical proofs, in particular it tries to capture the relationship between the real, „semantic" notion of mathematical proof, and its formal (algorithmic) counterpart. In the first part, Azzouni's *derivation–indicator view* is presented in a detailed way. According to the DI view, there is a formal derivation underlying every real proof.