Krzysztof Maślanka

Matematyka eksperymentalna – kilka refleksji historyka nauki

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 58 [Numer specjalny: filozofia matematyki], 115-150

2015

Matematyka eksperymentalna – kilka refleksji historyka nauki

Krzysztof Maślanka
Instytut Historii Nauki PAN
Warszawa – Kraków

Experimental mathematics – several remarks from historian of science

Abstract

The paper deals with the ever growing role of computers in pure mathematics. Several examples, mainly from number theory, when numerical experiments did shed some light on difficult problems are given.

Key words

number theory, history of computations, computer-assisted proof

Pamięci Profesora Andrzeja Pelczara (12 IV 1937 – 18 V 2010)

Beati mortui qui in Domino moriuntur,
opera enim illorum sequuntur illos.
Apokalipsa 14,13

1. Refleksje ogólne

Tekst niniejszego referatu, wygłoszonego przeze mnie 7 lutego 2011 r., jest kontynuacją i rozwinięciem niektórych wątków, które przedstawiłem wspólnie ze śp. profesorem Andrzejem Pelczarem 10 maja 2010 roku[1]. Przedwczesna śmierć Profesora, która nastąpiła osiem dni później, skłania do kilku nieformalnych refleksji i wspomnień. Przedstawię też szerzej motywacje dla wyboru tematyki obydwu referatów.

Profesor Pelczar był recenzentem mojej rozprawy habilitacyjnej pt. *Liczba i kwant* (OBI 2004) dotyczącej pewnych hipotez w analitycznej teorii liczb oraz ich nieoczekiwanych związków z fizyką kwantową. Związków, podkreślmy, nieoczekiwanych, bowiem łączących teorię liczb – czyli najczystszą z dziedzin matematyki – z żywą, doświadczalną fizyką mikroświata. A przecież jeszcze kilkadziesiąt lat temu wybitny matematyk angielski G.H. Hardy z niekłamaną dumą podkreślał, że teoria liczb nie ma i nigdy nie będzie mieć żadnych zastosowań w praktyce.

Kolokwium habilitacyjne odbyło się w Instytucie Historii Nauki PAN w Warszawie 14 kwietnia 2005 r. w pamiętnym okresie pomiędzy pogrzebem Jana Pawła II a rozpoczęciem konklawe. Później profesor Pelczar kilkakrotnie bardzo pozytywnie nawiązywał do mojej rozprawy. W połowie lutego

[1] K. Maślanka, *Ćwierć wieku od obalenia hipotezy Mertensa (1985). Refleksje na temat dowodu komputerowego*, „Prace Komisji Filozofii Nauk Przyrodniczych PAU", t. V, 2011, s. 19–39.

2010 r. zaproponował mi wspólny referat na Komisji Filozofii Nauk Przyrodniczych PAU. Uczynił to w sposób dość nieformalny i żartobliwy: „Jest zamach na pana…”. Oczywiście zgodziłem się.

Planowany na kwiecień referat opóźnił się o miesiąc z powodu żałoby po katastrofie smoleńskiej. 10 maja Profesor pomylił godziny i pojawił się w sali nr 26 PAU o godzinę za wcześnie: o 15-tej. Początkowo był trochę zażenowany swoją pomyłką. Ostatecznie jednak mieliśmy, wraz z przewodniczącym komisji prof. Jerzym Janikiem (1927–2012), całą tę godzinę na luźniejszą rozmowę, wspomnienia i anegdoty. Dziś skłonny jestem sądzić, że nie była to pomyłka: to raczej Przeznaczenie podarowało nam tę godzinę…

Wspomniany referat z 10 maja 2010 r., jak i jego kontynuacja z 7 lutego 2011 r., dotyczyły tzw. matematyki eksperymentalnej; mniej formalnie mówi się o „komputerach w matematyce”. Kwestia ta, jak często podkreślał Profesor, stanowi od niedawna autentycznie n o w ą j a k o ś ć i jako taka domaga się usprawiedliwienia. Jest rzeczą wiadomą, że nawet wybitni matematycy nie stronili od obliczeń numerycznych mających dopomóc intuicji, choć w ostatecznych wersjach swych publikacji starannie, jakby wstydliwie zacierali wszelkie ślady po takich próbach. Na temat obliczeń Gaussa i Riemanna mówiłem w poprzednim referacie. Choć nieczęsto się to podkreśla – a jeśli już, to bardziej w niezobowiązujących wypowiedziach matematyków, ale nigdy w podręcznikach – początkiem każdego twierdzenia i każdego dowodu jest i n t u i c j a. Trafnie wyraził

Rys. 1. Ostatnie zdjęcie prof. Pelczara wraz z przyjaciółmi, wykonane w dniu Jego śmierci 18 maja 2010 r., wkrótce po zakończeniu uroczystego posiedzenia Senatu Uniwersytetu Jagiellońskiego w Collegium Maius z okazji jubileuszu 50-lecia doktoratu prof. Józefa Siciaka. Od lewej profesorowie: Bolesław Szafirski, Czesław Olech, Józef Siciak i Andrzej Pelczar. (Zdjęcie ze zbiorów prof. Siciaka, dzięki uprzejmości prof. Szafirskiego).

to matematyk węgierski George Pólya (1887–1985): „Intuicja przychodzi do nas znacznie wcześniej niż ścisłe, formalne argumenty, ale tych z kolei nie możemy do końca zrozumieć, dopóki nie osiągniemy odpowiednio wysokiego stopnia abstrakcji”[2].

[2] G. Pólya, *Odkrycie matematyczne. O rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań*, tłum. A. Góralski, WNT, Warszawa 1975.

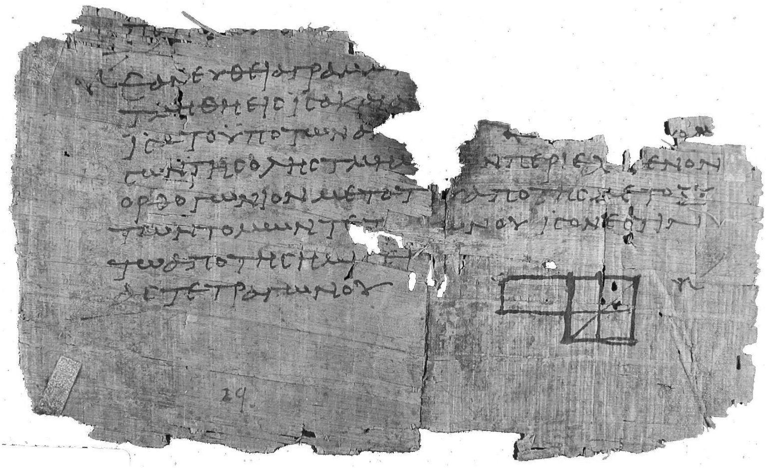
2. Parę uwag o dowodach

Z metodologicznego punktu widzenia matematyka zawsze różniła się od nauk przyrodniczych ze względu na swą naturę formalną oraz nacisk na rozumowanie dedukcyjne. Atrybutem matematyki był – i zawsze będzie – ścisły dowód, rozumiany oczywiście jako dzieło ludzkiego umysłu. Eksperymenty i obserwacje, czyli kamień węgielny nauk przyrodniczych oraz ostateczny probierz poprawności ich teorii, nie grały dotąd w matematyce specjalnej roli. Przynajmniej tak było jeszcze 30 lat temu.

Zaaprobowany przez środowisko matematyków dowód jest albo poprawny, albo nie jest dowodem i w zasadzie nie powinno tu być miejsca na subiektywne wartościowanie. Pomimo tego, szczególnie cenione są dowody „estetyczne", np. bardzo zwięzłe lub korzystające z zaskakujących powiązań z różnymi działami matematyki. Klasycznym przykładem jest znaleziony przez pitagorejczyków elementarny dowód typu nie wprost pokazujący niewymierność liczby $\sqrt{2}$, jak również dowód Euklidesa na to, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. To ostatnie nie jest oczywiste. Wiadomo, że w miarę przechodzenia do coraz większych liczb naturalnych, znajdujemy coraz mniej liczb pierwszych. Jest to niewątpliwie wynik numerycznych e k s p e r y m e n t ó w. Czy jednak napotkamy gdzieś hipotetyczną największą liczbę pierwszą? Czystym rozumowaniem Euklides pokazał, że tak nie jest i wyraził to w słowach: „Οι πρωτοι αριθμοι πλειους εισι παντος του προτεθεντος πληθους πρωτων αριθμον" („Liczb pierwszych jest więcej, niż jakiekolwiek dane ich mnóstwo", *Elementy*, księga IX, twierdzenie 20).

Obydwa te starożytne dowody przytaczane są do dziś w podręcznikach w formie podanej przez odkrywców, co dobitnie świadczy o trwałości matematycznych prawd: raz odkryte trwają, niewrażliwe na upływ czasu lub zmiany naukowej mody.

Alternatywny dowód pokazujący, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele odkrył w roku 1737 Leonhard Euler (1707–83). Używając ulubionego porównania profesora Pelczara można powiedzieć, że dowód Eulera to jakby inna



Rys 2. Starożytny papirus zwany *Oxyrhynchus* zawierający najstarszy znany zapis fragmentu sławnych *Elementów* Euklidesa. Nazwa pochodzi od miejscowości w Górnym Egipcie (obecnie El-Bahnasa, 160 km na południe od Kairu), gdzie natrafiono na olbrzymie ilości starożytnych papirusów z czasów, gdy Egiptem rządzili Ptolemeusze i Rzymianie (IV w. przed Chr. – VII w. po Chr.). Miejsce to, jako źródło cennych papirusów, jest eksploatowane bez przerwy od stu lat!

ścieżka prowadząca na ten sam szczyt. Więcej, jest to ścieżka, z której roztacza się bogatszy widok. Euler pokazał bowiem ponadto, że gęstość liczb pierwszych wśród liczb całkowitych jest na tyle duża, że suma ich odwrotności jest rozbieżna – w przeciwieństwie np. do kwadratów kolejnych liczb naturalnych, które z kolei są na tyle rzadkie, że suma ich odwrotności jest skończona. Euler pokazał również, że ta ostatnia suma wynosi $\pi^2/6$. (Odkrycie to stanowiło rozwiązanie zagadnienia znanego pod nazwą problemu bazylejskiego; dla wielu znanych matematyków był to próg nie do przekroczenia i dopiero młody Euler rozwiązał go poprawnie, ujawniając tym samym światu swój wielki talent).

Dowód Eulera opiera się na odkrytej przez niego głębokiej tożsamości, w której pojawia się definicja matematycznej funkcji dzeta:

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\substack{\text{wszystkie} \\ \text{liczby pierwsze } p}} \frac{1}{1-p^{-s}} \qquad \mathrm{Re}\, s > 1$$

Przechodząc w tej formule ze zmienną s do jedynki dostajemy po lewej szereg harmoniczny, który, co można pokazać w sposób elementarny, jest rozbieżny. Gdyby liczb pierwszych było skończenie wiele, to iloczyn po prawej byłby skończoną liczbą wymierną, co stanowi sprzeczność.

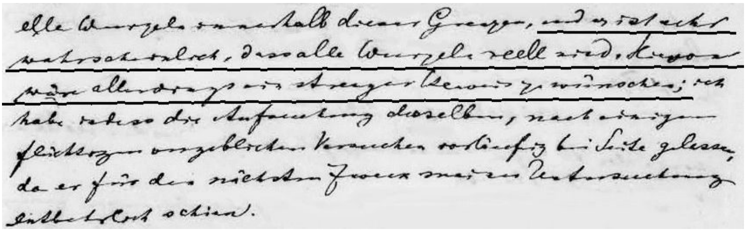
Jeszcze inna wersja tego dowodu polega na podstawieniu w formule Eulera $s = 2$:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \prod_{\substack{\text{wszystkie} \\ \text{liczby pierwsze } p}} \frac{p^2}{p^2 - 1}$$

W roku 1794 Adrien-Marie Legendre (1752-1833) w swym dziele *Géométrie* pokazał, że π^2 jest liczbą niewymierną, o czym sam Euler nie wiedział. Gdyby zatem ilość liczb pierwszych była skończona, po prawej stronie mielibyśmy wartość wymierną, co ponownie stanowi sprzeczność. Tu właśnie tkwi wspomniany element zaskoczenia, ten przejaw matematycznego piękna i ukrytej, globalnej koherencji całej matematyki, która nie jest zbiorem konwencji, ale spójnym logicznie systemem. Na pierwszy rzut oka niewymierność liczby π^2 (która to liczba ma naturalny rodowód geometryczny) oraz należący do teorii liczb problem ilości liczb pierwszych zdają się nie mieć ze sobą nic wspólnego.

Dlaczego piszę tu tyle o liczbach pierwszych? Ktoś może podejrzewać, że dlatego, iż wiążą się one z funkcją dzeta, gdzie mam swoje skromne osiągnięcia[3]. Każdy czytał w prasie o hipotezie Riemanna, czyli jednym z Problemów Milenijnych i milionie dolarów nagrody za rozstrzygnięcie każdego z nich. Prawda jest jednak bardziej skomplikowana i ciekawsza. Tu właśnie kończą się ambicje oraz finanse, a w naturalny sposób pojawia się głęboka filozofia matematyki.

[3] Więcej szczegółów zawiera mój tekst w internetowym wydaniu „PAUzy Akademickiej", nr 130, 30 czerwca 2011. Por też L. Baez-Duarte, *On Maslanka's reprezentation for the Riemann zeta-function*, arXiv:math/0307214v1 [mathNT] 16 Juni 2003.


alle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr
wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon
wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich
habe indess die Aufsuchung desselben, nach einigen
flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen,
da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung
entbehrlich schien.

Rys 3. Fragment rękopisu Riemanna jego pracy z roku 1859, przechowywany z pietyzmem w bibliotece uniwersyteckiej w Getyndze. Zawiera on jedno z najbardziej doniosłych zdań w całej literaturze matematycznej. Jest to hipoteza dotycząca funkcji dzeta mówiąca, że wszystkie zespolone pierwiastki tej funkcji leżą dokładnie na linii prostej. Gdyby faktycznie tak było, miałoby to wielkie znaczenie dla naszej wiedzy o liczbach pierwszych. „Oczywiście – pisze Riemann – ścisły dowód byłby tu bardzo pożądany. Po kilku krótkich, nieudanych próbach odłożyłem na jakiś czas poszukiwania tego dowodu”.

Leopold Kronecker (1823–91) powiedział kiedyś, że „wszelkie wyniki najbardziej podstawowych badań matematycznych muszą ostatecznie dać się wyrazić w prostej postaci – jako własności liczb całkowitych”[4]. Idąc krok dalej można dodać, że skoro liczby pierwsze są elementarnymi „atomami” wszystkich liczb całkowitych, to ostatecznie wszystko, co matematyczne ma swój początek w liczbach pierwszych. A z kolei zagadka ich rozmieszczenia ukryta jest w niepozornej funkcji dzeta odkrytej przez Eulera i wnikliwie zbadanej przez Riemanna...

Pogląd skrajny i niewątpliwie kontrowersyjny. Krytycy zarzucą Kroneckerowi to, że teoria liczb przesłoniła mu inne gałęzie

[4] D. Schumayer, D.A.W. Hutchinson, *Physics of the Riemann Hypothesis*, arXiv:1101.3116v1 [math-ph] 17 Jan 2011.

matematyki i zaszeregują takie stwierdzenie jako radykalny, tendencyjny i nieuzasadniony redukcjonizm. Przyjmijmy jednak na moment pogląd Kroneckera, i to nawet w mocniejszej wersji, że matematyka (i opisywana nią rzeczywistość fizyczna) ma swe źródło w funkcji dzeta. Matematyk niemiecki Jörn Steuding wypowiedział sentencjonalne zdanie: *Wer die Zetafunktion kennt, kennt die Welt!* (Kto poznał funkcję dzeta, ten poznał [cały] świat!)[5]. Jak zobaczymy dalej, nie jest to tylko pusty slogan.

W roku 1975 Siergiej Michajłowicz Woronin (1946–97) z Instytutu Matematycznego im. W.A. Stiekłowa w Moskwie udowodnił twierdzenie dotyczące funkcji dzeta, dla którego – dopuszczane czasem przez matematyków – określenia: „głębokie" ewentualnie „estetyczne" są stanowczo zbyt skromne; najchętniej nazwałbym ten wynik sensacyjnym, gdyby określenie to nie miało rozmaitych prymitywnych i nadużywanych w prasie skojarzeń. Nosi ono nazwę twierdzenia o uniwersalności funkcji dzeta[6]. W języku precyzyjnym brzmi:

Twierdzenie: Rozważmy pas na płaszczyźnie zespolonej:

$$\left\{s \in \mathbb{C}: \frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < 1\right\}$$

---

5 J. Steuding, *Primzahlverteilung*, wykład z teorii liczb w Uniwersytecie Goethego we Frankfurcie.

6 S.M. Voronin, *Theorem on the Universality of the Riemann Zeta Function*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. 39, s. 475–486. Przedruk w „Math. USSR Izv." 1975, 9, s. 443–445.

oraz zwarty podzbiór U w tym pasie taki, że jego dopełnienie jest również zwarte (czyli, mówiąc zwyczajnie, U nie ma dziur). Niech funkcja $f : U \rightarrow \mathrm{C}$ będzie ciągła na U, holomorficzna wewnątrz U i nie posiada miejsc zerowych wewnątrz U. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka wartość $t = t(\varepsilon)$, że:

$$|\zeta(s + it) - f(s)| < \varepsilon \quad \text{dla } s \in U$$

Innymi słowy: zadajmy w obszarze U spełniającym powyższe warunki d o w o l n ą, dostatecznie regularną funkcję f. Przesuwając U równolegle do osi urojonej odpowiednio daleko znajdziemy kształt zadany na U przez f odtworzony z zadaną z góry dokładnością ε przez funkcję dzeta! Natomiast w języku dostępnym dla laików (oczywiście nieprecyzyjnym, co nie znaczy, że gorszym) można powiedzieć, że funkcja dzeta zawiera w sobie wszelkie kształty, dosłownie wszystko: Biblię, dzieła Szekspira, symfonie Beethovena, niniejszy tekst – nawet samą siebie[7]... Oczywiście, miejsca na płaszczyźnie zespolonej Gaussa, w których znajdują się owe treści, pozostaną zapewne zawsze poza zasięgiem naszych komputerów, niemniej mamy absolutną pewność, że takie miejsca, choć niedostępne, istnieją.

Trzeba być matematycznym daltonistą, by nie zatrzymać się nad takim wynikiem i nie poczuć w nim tej autentycznej ta-

[7] S.C. Woon, *Riemann zeta function is a fractal*, arXiv:chao-dyn/9406003 v1, 11 Jun 1994.

Rys. 4. Siergiej Michajłowicz Woronin (11 marca 1946 – 18 października 1997).

jemnicy, której na imię Nieskończoność. Czy może być lepszy punkt wyjścia dla uprawiania filozofii królowej nauk?

Zauważyłem, że ulubione tematy filozofów matematyki to odwieczne pytanie o istnienie obiektów matematycznych (platonizm), „niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych" (pytanie E. Wignera o racjonalność przyrody) oraz twierdzenia Gödla o niezupełności (komentowane często bez zrozumienia szczegółów jego dowodu). Niezwykły wynik Woronina nie doczekał się takiego uznania w ich oczach. Może dlatego, że znaleziono go za „żelazną kurtyną", a jego odkrywca zmarł przedwcześnie? A może dlatego, że koncepcje rozkładu wartości funkcji dzeta albo krzywych wszędzie gęstych nie wyglądają dla filozofów zbyt zachęcająco? Któż to może wiedzieć?

3. Komputery: za i przeciw

Można sentencjonalnie powiedzieć, że komputer to liczby ucieleśnione z pomocą elektroniki, która z kolei jest namacalnym, praktycznym tryumfem mechaniki kwantowej, tej nader skutecznej, choć budzącej tyle zdumienia i niedosytu teorii. Platońskie byty sprowadzone ze świata idei na ziemię za pomocą krzemowych układów scalonych. Dla praktyków to powód do satysfakcji i dowód potężnej skuteczności ludzkiej inwencji. Ale dla purystów to znak sprofanowania świata wzniosłych i niezależnych od eksperymentu idei, penetrowanych dotąd jedynie przez czystą myśl człowieka.

Wszechobecne dzisiaj komputery kolejnych generacji oraz liczne przykłady pouczających eksperymentów numerycznych sprawiły, że powstała nowa gałąź wiedzy: m a t e m a t y k a e k s p e r y m e n t a l n a. Jednak w świetle tego, co napisałem powyżej o matematycznych dowodach, już samo zestawienie tych słów brzmi jak sprzeczność albo wręcz rozmyślna prowokacja. Czy nie jest to tylko, tak modne ostatnio, szukanie na siłę nowych dziedzin nauki w celu otwierania kolejnych wydziałów na coraz słabszych uczelniach? Jeszcze krok dalej i usłyszymy o teologii doświadczalnej lub socjologii kwantowej! Czegóż to się teraz nie robi, by tylko była sensacja i nabór na nowe kierunki? Ale wróćmy do tematu.

Jeden z prekursorów i entuzjastów matematyki eksperymentalnej, matematyk kanadyjsko-brytyjski Jonathan Borwein (obecnie w University of Newcastle, Callaghan, Australia), sformułował następujący program badawczy, swoistą deklarację ideową matematyków, którzy nie gardzą komputerami jako skutecznym narzędziem. Według niego, matematyka eksperymentalna to pewna metoda uprawiania matematyki, której zadaniem jest:

1. Zdobyć dogłębne zrozumienie, wgląd (*insight*) w dany problem oraz intuicję,
2. Odkryć nowe prawidłowości oraz powiązania,
3. Przy użyciu możliwości graficznych komputera zapostulować głębsze, ukryte, leżące u podstaw reguły matematyczne,
4. Testować [niedowiedzione] założenia, a w szczególności szukać kontrprzykładów,
5. Zbadać znaleziony wynik w celu odpowiedzi na pytanie, czy jest on wart formalnego dowodu,
6. Zasugerować podejście do takiego formalnego dowodu,
7. Unikać długich, nużących obliczeń zastępując je rachunkami komputerowymi,
8. Weryfikować wyniki znalezione analitycznie[8].

Nie są to gołosłowne deklaracje, bowiem za nimi idą coraz liczniejsze fakty i zastanawiające przykłady. Kilka z nich przytoczyłem w poprzednim referacie[9]. Oto kolejny: w kwietniu 1993 r. Enrico Au-Yeung, student w University of Waterloo, eksperymentując na komputerze zauważył, że:

---

[8] J. Borwein, D. Bailey, *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*, 2004..
[9] Prace Komisji Filozofii Przyrody PAU.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)^2 = 4.59987\ldots \approx \frac{17}{360}\pi^2$$

i pokazał ten wynik Borweinowi. Ten początkowo był bardzo sceptyczny; uważał, że to tylko przypadkowa koincydencja oraz, że na którymś z dalszych miejsc nastąpi wyraźna rozbieżność w ostatniej, przybliżonej równości. Ale kiedy zgodność numeryczna obu stron tej domniemanej tożsamości osiągnęła 100 cyfr po przecinku, trudno już było przypisać to przypadkowi. Borwein zaczął uważnie badać takie sumy – i udowodnił hipotezę studenta. Później udowodniono też drugą tożsamość:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{11}{360}\pi^4$$

Do dziś jednak nie udało się dowieść kolejnej hipotezy, że:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{-2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)^3 \overset{?}{=} \frac{17}{360}\zeta(5)+\zeta(2)\zeta(3)$$

Nie wszyscy jednak są takimi entuzjastami komputerów, jak wspomniany Borwein. Komputery weszły już pod przysłowiową strzechę, co ma sporo zalet, ale też niemało ubocznych skutków. Jest faktem, że czerpana z Internetu wiedza jest w społeczeństwie coraz szersza; jednocześnie jednak jest coraz bardziej powierzchowna. Roman Galar z Instytutu Informatyki, Automatyki i Robotyki Politechniki Wrocławskiej w swoim odważnym artykule[10] podkreśla z naciskiem, że w komputerze, inaczej niż w rzeczywistości fizycznej:

– wszystko ma charakter przyczynowo-skutkowy, celowy i poznawalny,
– wszystko podlega kontroli rozumu – kompetencja użytkownika w pełni kontroluje wydarzenia,
– wszystkie błędy są zawinione i można zawsze je odkryć oraz skorygować,
– w przypadku katastrofy można zawsze system „zresetować" i zacząć od początku.

W dalszym ciągu Galar formułuje dwa brutalnie szczere wnioski na podstawie własnych obserwacji środowiska studentów:

– maleje korelacja między pasjami komputerowymi i talentami matematycznymi; typ psychologiczny rasowego komputerowca zdaje się ewoluować w stronę intuicyjnej osobowości kierowcy rajdowego,
– zainteresowanie komputerami wypiera zainteresowanie resztą rzeczywistości; zmierza to do sytuacji, w której osoby potrafiące zastosować komputery do wszystkiego, nie znają się na niczym.

[10] R. Galar, *Krajobraz z komputerem*, „Matematyka" 2010, 4, s. 223. – Jak napisano w komentarzu od redakcji, „główne tezy zostały sformułowane przez Autora kilka lat temu i odebrane wówczas jako prowokacja. Życie pokazało jednak słuszność diagnozy i przewidywań Autora".

Jest zatem jasne, że w kwestii komputerów trzeba by znaleźć jakiś złoty środek, a to stanowi dobrą okazję do przedstawienia refleksji ogólnych w celu rzetelnego zrozumienia przyczyn wielu tych jakościowych zmian oraz ich potencjalnych skutków, słowem – dla filozofii nauki, jej metodologii oraz historii.

4. Zgryźliwa dygresja socjologiczna

Powyżej pokazałem, że refleksje filozoficzne, oparte oczywiście na rzetelnych podstawach i mające jako punkt wyjścia solidne wyniki, są nieuniknione i mogą być inspirujące.

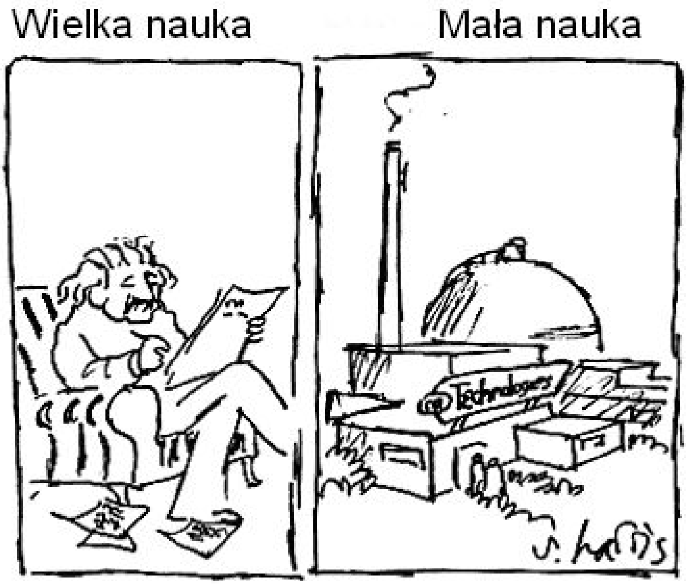
Z drugiej strony wiadomo, że – w przeciwieństwie do humanistów – przedstawiciele nauk typu *science* często jawnie lekceważą ogólne refleksje dotyczące ich dziedzin nauki i świadomie ich unikają. Czynią tak głównie z powodów pragmatycznych: współczesny system ocen naukowych, oparty na przeszczepionych ze sportu rankingach ilościowej wydajności, promuje niekoniecznie głębokie, ale konkretne wyniki, za które wyszkolony w sumowaniu liczb urzędnik przyznaje potem punkty i fundusze na badania.

Znajdujący się na fali domniemanych sukcesów naukowiec, w atmosferze bezwzględnej konkurencji, wśród licznych formularzy grantowych i gorączki częstych wyjazdów konferencyjnych – aby tylko być na bieżąco w swej tematyce – po prostu nie może sobie pozwolić na luksus głębszej refleksji filozoficznej, czy studia nad historią swej dyscypliny. Co więcej, refleksje tego typu są mało wymierne, nie mają szans na zastosowania praktyczne i trzeba by niezwykłej zręczności, żeby jakoś wpleść w nie puste, ale obowiązkowe teraz hasła w rodzaju: „znaczenie dla gospodarki", „zarządzanie zasobami ludzkimi", „innowacyjność", „kreatywność" czy „konkurencyjność". Refleksje takie nie mają więc szans wobec urzędniczej mentalności. Funkcjonują tu osobliwe implikacje: „trudne" to „niezrozumiałe", a z kolei „nie mające zastosowań" to automatycznie „bezwartościowe". Słowem, nauka jako biznes, a instytuty jako przedsiębiorstwa produkcyjne. Absurdy te, lansowane oficjalnie i bez zażenowania przez polityków, zyskują ostatnio normy prawne; dochodzą nawet do redakcji naukowych periodyków, które odrzucają rzetelne prace jako „nieatrakcyjne dla czytelników".

Rozmawiałem niedawno na ten temat z pewną błyskotliwą osobą, która żartobliwie zasugerowała mi, jako antidotum, taki oto – niewątpliwie atrakcyjny! – tytuł artykułu z mojej dziedziny: *Skandal w teorii liczb*...

Ktoś nawet powiedział, że „filozofia nauki jest tak potrzebna naukowcom, jak ornitologia ptakom"[11]. Powiedzenia lapidarne, inteligentne, złośliwie, a niewątpliwie też pożyteczne, bo inspirujące do rzetelnej, przemyślanej obrony historii i filozofii nauki. A tymczasem proponuję rzut oka na poniższy *cartoon* znanego rysownika amerykańskiego Sidneya Harrisa, którego ironiczne grafiki i trafne spostrzeżenia inspirowane są głównie naukami ścisłymi. Na koniec tego tekstu przytoczę jeszcze dwa obrazki dowcipnie ilustrujące kwestię dowodów matematycznych.

[11] Cytat anonimowy za: S. Weinberg, *Newtonianism, Reductionism and the Art of Congressional Testimony*, „Nature" 1987 (3 XII), 330, s. 433.



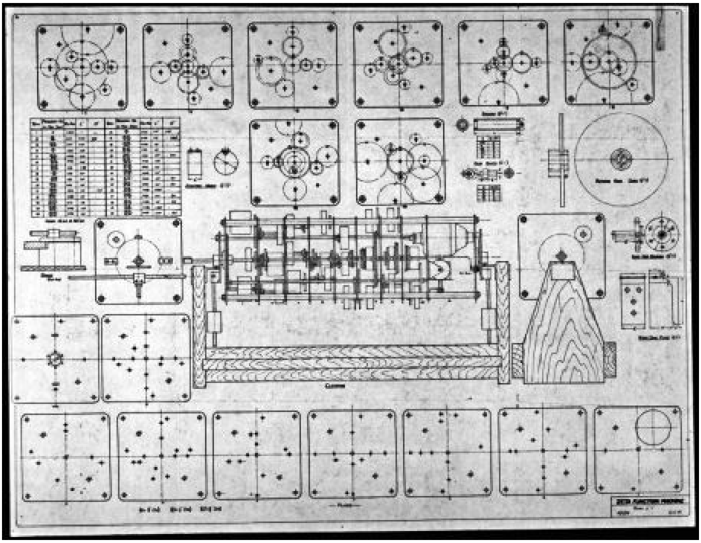
Rys. 5. Autor: Sidney Harris, źródło: http://www.sciencecartoonsplus.com/pages/gallery.php.

5. Dygresja historyczna: dwie nieudane próby ataku na hipotezę Riemanna

W dalszym ciągu przedstawię dwie pouczające, choć z dzisiejszego punktu widzenia dość naiwne i zupełnie nieudane próby ataku, za pomocą maszyn analogowych, na problem skrajnie trudny – na hipotezę Riemanna. Dziś niektórzy byliby skłonni pochopnie uznać takie pomysły za maniackie, ale obydwa były dziełem uznanych autorytetów i w swoim czasie były to próby bardzo ambitne.

Pierwsza z nich pochodzi od powszechnie znanego matematyka, kryptologa i pioniera informatyki Alana M. Turinga (1912–54), który krótko przed drugą wojną światową postanowił skonstruować mechaniczne urządzenie w celu analogowego znajdowania kolejnych zespolonych miejsc zerowych – pierwiastków funkcji dzeta. (Sławna hipoteza Riemanna, najważniejszy z nierozstrzygniętych problemów teorii liczb, dotyczy właśnie położenia tych pierwiastków na płaszczyźnie zespolonej i mówi, że w s z y s t k i e one leżą dokładnie na pewnej linii prostej zwanej tradycyjnie, choć niezbyt logicznie, prostą krytyczną. Ewentualna prawdziwość tej hipotezy byłaby fundamentalna dla naszej wiedzy o liczbach pierwszych). Trzeba przyznać, że rozumowanie Turinga było dość osobliwe jak na matematyka: skoro nikomu przez prawie sto lat nie udało się udowodnić hipotezy Riemanna, to najwidoczniej jest ona fałszywa. Musi zatem istnieć kontrprzykład dla niej: pierwiastek funkcji dzeta leżący poza prostą krytyczną.

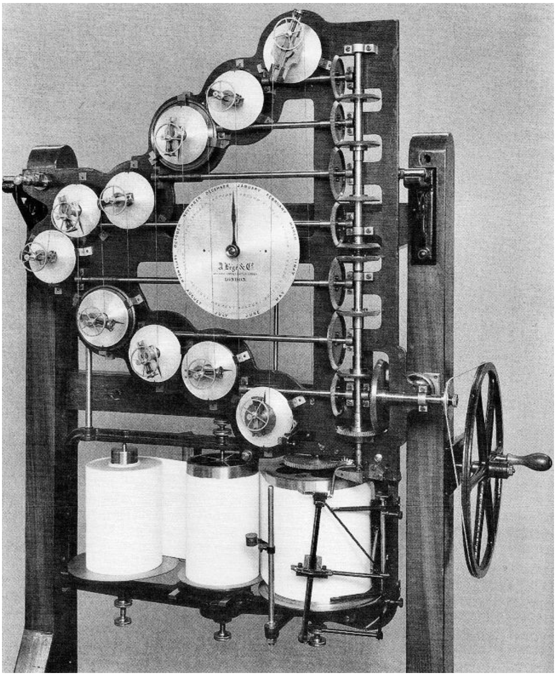
Wspomniane urządzenie miało taki kontrprzykład efektywnie znaleźć. By je odróżnić od sławnej m a s z y n y T u r i n g a, z którą nie ma nic wspólnego, i która jest pomysłem czysto teoretycznym, będę dalej mówił o „maszynce Turinga". Według jego planu, był to układ kilkunastu kół zębatych obliczających pewną zawiłą, choć elementarną sumę funkcji trygonometrycznych.



Rys 6. Światłokopia (tzw. *blueprint*) planu projektu maszynki Turinga w negatywie.

Ku zdziwieniu swych kolegów-matematyków, Turing osobiście nadzorował wytaczanie tych kół przez studenta, a jednocześnie inżyniera, niejakiego MacPhaila. Było to bardzo jawne odstępstwo od uświęconej tradycją matematycznej czystości, znacznie gorsze od inżynierskich oszacowań z użyciem suwaka logarytmicznego.

Inspiracją dla idei Turinga, w zasadzie poprawnej, była inna maszyna służąca od dawna w Liverpoolu do praktycznego przewidywania wartości pływów morskich i obliczająca analogowo podobną sumę trygonometryczną, choć oczywiście o innej interpretacji. I tu dygresja: jakże cenna jest w nauce „intuicja ważniejsza od wiedzy" (pogląd Einsteina), która pozwala trafnie skojarzyć dwa pozornie odległe problemy! Jest to też wymowna ilustracja potęgi analogii w nauce oraz tej trywialnej prawdy, że „te same równania mają te same rozwiązania" – niezależnie od interpretacji ich współczynników. Oczywiście, dziś taka suma nie stanowi problemu dla posiadacza lepszego kalkulatora, ale opisany projekt powstał, zanim pojawiły się pierwsze komputery elektroniczne.

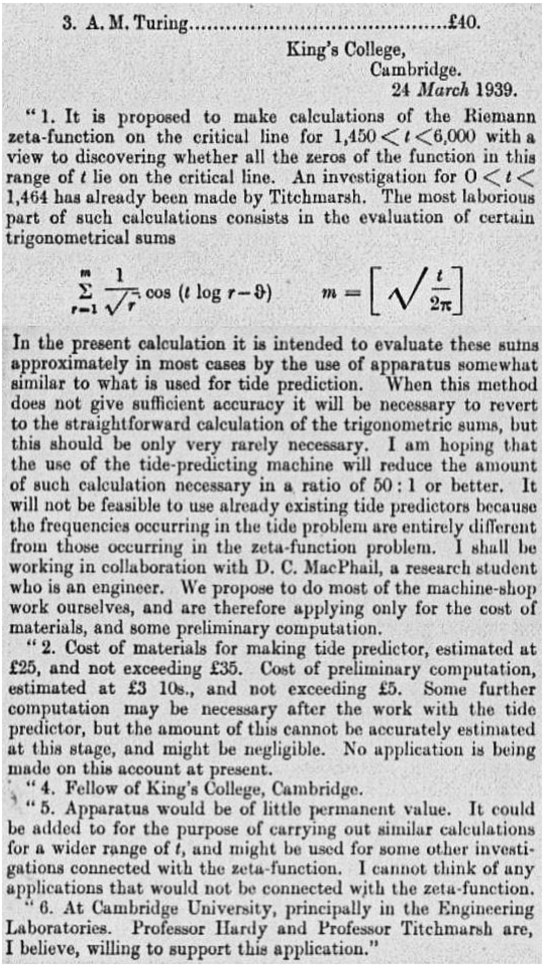


Rys 7. Analogowe urządzenie do przewidywania pływów morskich w Liverpoolu zbudowane przez Williama Thomsona w roku 1872. Urządzenie to skutecznie zainspirowało Turinga. Widać układ kół sumujących analogowo funkcje trygonometryczne oraz rejestrator wyników na taśmie papierowej (u dołu).

Turing wystąpił do Royal Society o grant w wysokości 40 funtów na wykonanie swej maszynki i uzyskał go dzięki pozytywnej rekomendacji matematyka, eksperta od funkcji dzeta i autora podstawowej do dziś monografii na ten temat, Edwarda Titchmarsha (1899–1963). Inny wspomniany powyżej matematyk, Hardy, był także pozytywnie nastawiony do tego pomysłu. Jednak wkrótce potem wybuchła wojna i do głosu doszedł antynaukowy pragmatyzm: w nowych warunkach Turing, jako pracujący dla armii kryptolog, okazał się bardziej przydatny niż Turing jako teoretyk liczbowy z platońskiego świata matematycznych idei. Kółka zębate nie doczekały się złożenia w działającą całość i prawdopodobnie zaginęły.

Dziś wiemy, dzięki eksperymentom numerycznym wykonanym z pomocą nowoczesnych superkomputerów, że hipoteza Riemanna nie jest na pewno naruszona aż do miejsca zerowego o numerze 10^{13}. Liczba ta to, z jednej strony, „bardzo dużo" w porównaniu z prawie sześcioma tysiącami takich miejsc będących w zasięgu maszynki Turinga; z drugiej jednak strony, to bardzo niewiele w porównaniu z atrybutem teorii liczb – nieskończonością, której z pewnością nie osiągnie nigdy żaden komputer.

Drugi przykład analogowego aparatu do badania funkcji dzeta jest późniejszy o prawie dziesięć lat i pochodzi od ambitnego inżyniera z Holandii, Balthasara van der Pola (1889–1959), znanego głównie ze swych osiągnięć w teorii propagacji fal radiowych oraz projektów odbiorników radiowych dla zasłużonej firmy Philips. Biografowie piszą o nim, że „miał niewątpliwie talent, choć był wyjątkowo próżny". Van der Pol dopro-



3. A. M. Turing..£40.

King's College,
Cambridge.
24 *March* 1939.

"1. It is proposed to make calculations of the Riemann zeta-function on the critical line for $1{,}450 < t < 6{,}000$ with a view to discovering whether all the zeros of the function in this range of t lie on the critical line. An investigation for $0 < t < 1{,}464$ has already been made by Titchmarsh. The most laborious part of such calculations consists in the evaluation of certain trigonometrical sums

$$\sum_{r=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{r}} \cos(t \log r - \vartheta) \qquad m = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right]$$

In the present calculation it is intended to evaluate these sums approximately in most cases by the use of apparatus somewhat similar to what is used for tide prediction. When this method does not give sufficient accuracy it will be necessary to revert to the straightforward calculation of the trigonometric sums, but this should be only very rarely necessary. I am hoping that the use of the tide-predicting machine will reduce the amount of such calculation necessary in a ratio of 50 : 1 or better. It will not be feasible to use already existing tide predictors because the frequencies occurring in the tide problem are entirely different from those occurring in the zeta-function problem. I shall be working in collaboration with D. C. MacPhail, a research student who is an engineer. We propose to do most of the machine-shop work ourselves, and are therefore applying only for the cost of materials, and some preliminary computation.

"2. Cost of materials for making tide predictor, estimated at £25, and not exceeding £35. Cost of preliminary computation, estimated at £3 10s., and not exceeding £5. Some further computation may be necessary after the work with the tide predictor, but the amount of this cannot be accurately estimated at this stage, and might be negligible. No application is being made on this account at present.

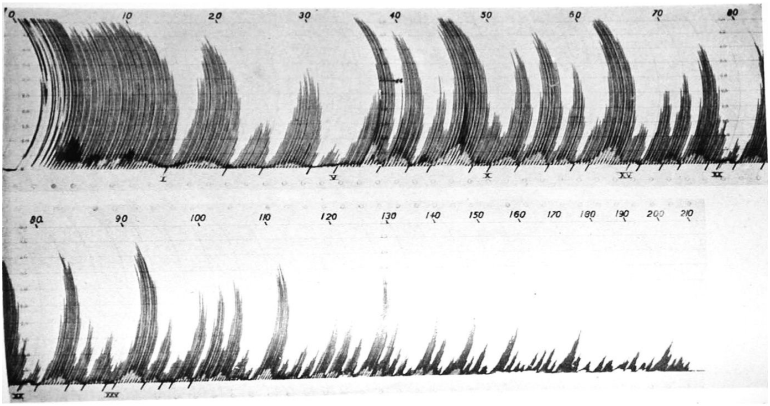
"4. Fellow of King's College, Cambridge.

"5. Apparatus would be of little permanent value. It could be added to for the purpose of carrying out similar calculations for a wider range of t, and might be used for some other investigations connected with the zeta-function. I cannot think of any applications that would not be connected with the zeta-function.

"6. At Cambridge University, principally in the Engineering Laboratories. Professor Hardy and Professor Titchmarsh are, I believe, willing to support this application."

Rys 8. Opis projektu maszynki Turinga w jego prośbie do Royal Society o dofinansowanie. Autor wypełnił standardowy, kilkupunktowy formularz ówczesnego grantu (istota pomysłu, koszt wykonania, stanowisko autora, wnioski, kto popiera projekt). Całość mieściła się na jednej stronie. W porównaniu z dzisiejszymi stosami szpargałów, które trzeba wypełnić aplikując o grant, jest to godna polecenia zwięzłość.

wadził swój pomysł do skutku i opublikował (1947 r.), choć nie znalazł niczego przełomowego w dotychczasowej wiedzy. Było to urządzenie elektromechaniczne, które poprawnie wykryło położenia pierwszych kilkunastu pierwiastków funkcji dzeta. Niestety, wyższe zera pozostały nieosiągalne z powodu małej czułości i nieusuwalnych szumów aparatury.



Rys 9. Wynik pracy elektromechanicznego urządzenia van der Pola. Minima obwiedni chaotycznej krzywej, kreślonej piórkiem na papierowej taśmie, znajdują się w częściach urojonych kolejnych pierwiastków funkcji dzeta: 14.1347…, 21.0220…, 25.0109…, 30.4249…, 32.9351… .

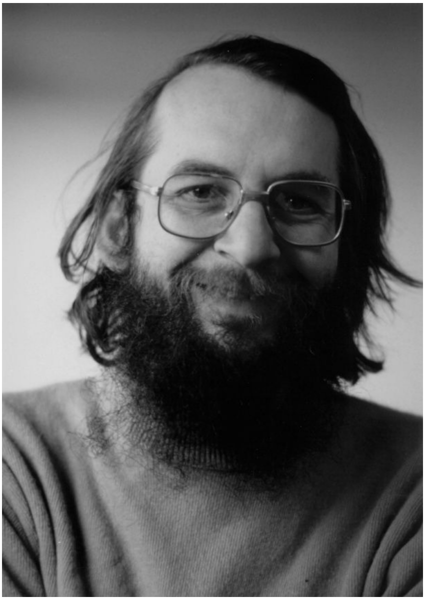
Oczywiście, przewaga naszej wiedzy pozwala nam patrzeć z wyższością na naiwne próby Turinga i van der Pola. Trzeba jednak być pobłażliwym, jak również mieć tę świadomość, że za kilkadziesiąt lat niektóre z naszych, obecnie najlepszych prób, również wydadzą się naiwne. Historia nauki uczy, że nie można przeskoczyć pewnych obowiązkowych dla rozwoju nauki progów.

6. Po śladach Jerry'ego B. Keipera

Sądzę, że dobrym pretekstem i punktem wyjścia do obrony zdrowo rozumianego filozofowania w nauce może być jakaś postać niebanalnego uczonego, który osiągnął trwałe wyniki naukowe i w swych pracach kierował się własną intuicją, a nie aktualnie zalecaną modą. Bohaterem niniejszego rozdziału będzie przedwcześnie i tragicznie zmarły w roku 1995 amerykański matematyk oraz informatyk Jerry B. Keiper (1953–95). Dowiedziałem się o nim przypadkiem i od razu poczułem silną więź duchową z jego poglądami i stylem pracy.

Według obiegowych poglądów Keiper był tylko nieżyciowym dziwakiem, niepoprawnym idealistą, przywiązującym nadmierną wagę do własnych marzeń oraz do religii (był członkiem Kościoła mennonitów, jednego z nurtów protestanckich, który powstał w 1539 r. w Holandii). Był niby przysłowiowy kot: nieprzekupny i chadzający swoimi drogami. Ale to bardzo powierzchowne wrażenie; w głębi krył się wrażliwy człowiek oraz zdolny i skuteczny uczony.

Oto zupełnie niezwykły rys jego osobowości. Nie jest tajemnicą, że znaczna (i zupełnie niekontrolowana przez społeczeństwo) część podatków idzie na zbrojenia wojskowe. Nikt jednak nie odczuwa z tego powodu szczególnego dyskomfortu. Kwestii tej nie nagłaśnia się, a większość podatników albo o tym nie wie, albo odpędza od siebie takie myśli wzruszając ramionami: a cóż ja mogę na to poradzić? Albo wreszcie skuteczne zatruwa sumienie jakimś gładkim sloganem o bezpieczeństwie państwa, o roz-



Rys. 10. Jerry B. Keiper (1953–95). (Fotografia dzięki uprzejmości Michaela Trotta, Wolfram Research).

maitych poczynaniach, które dla dobra społeczeństwa muszą być tajne itp. Wobec logicznego argumentu, że skrajnie dochodowy handel bronią jest niemoralny wobec tragicznego ubóstwa i głodu w wielu regionach świata, dyskretnie zmienia się temat. Można też otrzymać etykietkę pacyfisty, w sensie negatywnym – jako kogoś oderwanego od rzeczywistości lub wręcz tchórza unikającego służby wojskowej. I tak zignorowany, albo wyśmiany problem pozornie znika ze świadomości społecznej.

Na myśl przychodzą tu rozterki owego anonimowego robotnika, bohatera młodzieńczego wiersza Karola Wojtyły pt. *Robotnik z fabryki broni* z tomu *Profile Cyrenejczyka* (1957 r.):

Nie wpływam na losy globu, nie wszczynam wojen.
Czy idę z Tobą, czy przeciw Tobie – nie wiem.
Nie grzeszę.
Dręczy mnie właśnie to, że nie ja wpływam i nie ja grzeszę,
że toczę drobne zakrętki i gotuję fragmenty zniszczeń,
a nie ogarniam całości, nie ogarniam doli człowieczej.

W tej kwestii Keiper był bardzo radykalny: za żadną cenę nie chciał współfinansować zbrojeń, choćby i bezwiednie. Nie zatruwał swego sumienia pseudopatriotycznymi sloganami o bohaterstwie i poświęceniu dla kraju „naszych chłopców" z Korei, Laosu, Wietnamu czy Iraku, przelewających swoją krew za ojczyznę w walce z terrorystami. (Nawiasem mówiąc, pojęcie „terrorysty" stało się ostatnio równie pojemne, jak pojęcie „bandyty" w czasie II wojny światowej).

Z drugiej strony, niepłacenie podatków od dochodów jest naruszeniem prawa, a wykrycie tego sprowadza poważne kłopoty. Czy zawsze? Czy można bezkarnie nie płacić podatków? Na to pytanie Keiper znalazł odpowiedź tyleż zdumiewającą w swej prostocie, co zupełnie nie do przyjęcia dla większości ludzi. Podatek jest stosowną częścią dochodów. Zerowy dochód oznacza zerowy podatek. Całkowita rezygnacja z dochodów zwalnia więc z podatku. Keiper świadomie wybrał takie właśnie mało spektakularne i równie mało amerykańskie rozwiązanie. W tej sytuacji jego pracodawca, firma Wolfram Research, w której był od początku niezastąpionym pracownikiem, zapewniła mu elementarny byt powołując pewną niedochodową fundację. Jak potem powiedział pastor Larry Wilson z Kościoła mennonitów w rodzinnym mieście Keipera, on „autentycznie żył swoją wiarą" i dlatego taki styl życia uznał za zupełnie naturalny. Z kolei promotor jego pracy Kenneth B. Stolarsky napisał mi, że Keiper był „w jakimś sensie po prostu za dobry, jak na ten świat" (*In a way he was just too good for this world*)[12].

Czując wewnętrzną potrzebę poświęcenia się pracy dydaktycznej, Keiper złożył też propozycję pracy w kilku koledżach. Jednak posady nie dostał: na decydentach złe wrażenie zrobiła drobna uwaga, którą wpisał w formularzu aplikacyjnym: „pensja bez znaczenia" (*salary goal: not an issue*). W istocie Keiper nie chciał żadnej pensji. Gdyby zażądał wiele, byłby typowym, „swoim" człowiekiem; tymczasem zachował się w sposób niezrozumiały, co dla wielu jest równoznaczne z epitetem „podejrzany".

Prawdziwie ewangeliczna prostota i doskonała zgodność poglądów z życiem. W dobie obłudy, konformizmu i dyplomatycznych masek przywdziewanych na każdą okazję, postać Keipera wydaje się jakby wyjęta z innej epoki, po prostu nienormalna. Jeśli przez normalność rozumieć typową, akceptowaną przez ogół postawę, to Keiper był z pewnością nienormalny, oczywiście bez odcienia pejoratywnego. Ale to takie właśnie jednostki stanowią przysłowiową „sól ziemi". To oni pozostają w pamięci. Jednych bulwersują, innych niepokoją, jeszcze innych zmuszają do refleksji, niekiedy podziwu. Na ogół jednak nie znajdują naśladowców.

[12] Mail z 16 listopada 2006 r.

*

Około roku 1997 w swoich – dość jeszcze wtedy amatorskich – badaniach nad funkcją dzeta Riemanna obliczałem m.in. tzw. stałe Stieltjesa γ_n, które *de facto* są współczynnikami rozwinięcia na szereg Laurenta tej sławnej i bardzo ważnej funkcji, wokół jej jedynego bieguna dla $s = 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n$$

Stałe te pojawiły się po raz pierwszy w listach Thomasa J. Stieltjesa do Charlesa Hermite'a (1885 r.)[13] w postaci definicji:

$$\gamma_n = \lim_{m\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\log^n k}{k} \right) - \frac{\log^{n+1} m}{n+1} \right]$$

Jak to zwykle w kwestiach numerycznych bywa, formalna, ścisła i naturalna definicja jest bezwartościowa, gdy chcemy numerycznie obliczyć wartość danej stałej z zadaną z góry dokładnością, np. 100 cyfr znaczących. Naiwne zastosowanie powyższej definicji dla jednej choćby stałej, np. γ_1, wymagałoby mocy obliczeniowej wszystkich dostępnych teraz na świecie komputerów pracujących przez czas wielokrotnie dłuższy od wieku Wszechświata. Wymyśliłem więc własną formułę, która, choć

[13] Thomas Jan Stieltjes, [w:] B. Baillaud, H. Bourget, *Correspondance d'Hermite et Stieltjes*, Gauthier–Villars, Paris 1905, s. 160–164.

lepsza (szybciej zbieżna), daleka była od skuteczności. W literaturze znalazłem kilka innych reprezentacji tych ważnych liczb, ale wszystkie one nie nadawały się do praktycznych obliczeń. Zdesperowany skorzystałem więc z profesjonalnego programu *Mathematica* firmy Wolfram Research, który w ułamku sekundy (poniżej 1/10 s) podawał kolejne wartości γ_n z dokładnością 100 cyfr. Zaintrygowany zajrzałem do pliku pomocy tego programu, gdzie wyczytałem: „StieltjesGamma uses Keiper's algorithm based on numerical quadrature of an integral representation of the zeta function and alternating series summation using Bernoulli numbers".

Programy komputerowe mają zawsze obszerny plik pomocy. Dla niecierpliwych jest też skrót pomocy, czyli plik FAQ (*Frequently Asked Questions* – Często Zadawane Pytania), ale z reguły nie podaje się tam odnośników do fachowej literatury. Nie byłem więc w stanie odtworzyć i zrozumieć „zaimplementowanego" w programie algorytmu. Niemniej było to moje pierwsze spotkanie z Jerrym Keiperem. Wkrótce potem z nekrologu napisanego przez założyciela i szefa firmy Wolfram Research Stevena Wolframa dowiedziałem się, że rozpoczynając pracę w jego firmie Keiper podjął się ambitnego zadania opracowania i efektywnego zastosowania w *Mathematice* optymalnych algorytmów, które by pozwalały obliczyć wartość d o w o l n e j funkcji specjalnej dla d o w o l n y c h wartości jej, na ogół zespolonych, argumentów. Zadanie to zostało przez wielu, w tym przez samego Stevena Wolframa, uznane za nierealistycznie trudne, ale cierpliwy i metodyczny Keiper powoli wywiązywał się z niego. W szczególności znalazł stosowny, szybko zbieżny algorytm dla wspomnianych stałych Stieltjesa i opublikował go w roku 1992 w czasopiśmie „Mathematics of Computations”[14].

I tu nastąpiło kilka epizodów, które ze wzniosłego świata matematycznych idei Platona skutecznie sprowadziły mnie do twardej rodzimej rzeczywistości. Okazało się bowiem, że wspomniany artykuł Keipera znajduje się w obszernej internetowej bazie czasopism JSTOR, gdzie można go kupić za istotny ułamek i tak już głodowej pensji pracownika PAN-u. Standardowy na Zachodzie legalny zakup przez macierzystą instytucję tutaj groziłby zachwianiem jej budżetu. Natomiast osławiona i nielegalna strona internetowa *Pirate Bay* (*Zatoka Piratów*) nie oferuje tak nieatrakcyjnego towaru, jak publikacje z teorii liczb; zresztą skorzystanie z takiej strony wiązałoby się z ryzykiem, że ktoś „życzliwy inaczej” nagłośni sprawę i lojalnie doniesie gdzie trzeba.

Na szczęście z pomocą przybył mój niezawodny przyjaciel z Wenezueli matematyk Luis Báez-Duarte, który polecił zeskanować bibliotekarzowi ów artykuł i przesłał mi go mailem. Zamiast zastanawiać się na legalnością takiego postępowania i ewentualnym znaczeniem funkcji dzeta dla zastosowań w gospodarce narodowej, zacząłem wnikliwie studiować otrzymany tekst. Okazało się, że jest tam nie tylko wspomniany algorytm obliczania stałych Stieltjesa; są także prawdziwe perły analitycznej teorii liczb. Ale to już temat na kolejny referat.

---

[14] J.B. Keiper, *Power Series Expansions of Riemann's Zeta Function*, „Mathematics of Computations” 1992, 58, 198, s. 765–773.

*

Jerry B. Keiper zmarł tragicznie będąc w pełni swych sił twórczych i ambitnych planów. Śmierć dopadła go niespodziewanie na skrzyżowaniu Prospect Avenue i John Street w miejscowości Champaign w amerykańskim stanie Illinois. W zimowy wieczór 18 stycznia 1995 r. wracał do domu po pracy swoim stałym zwyczajem, czyli w sposób raczej mało amerykański: nie samochodem, lecz rowerem. Było około godziny osiemnastej, kiedy czekał na skrzyżowaniu na zmianę świateł na prowadzącym na północ pasie Prospect Avenue, żeby skręcić w lewo. Najpierw niezidentyfikowany samochód uderzył rowerzystę z tyłu i zepchnął na sąsiedni pas, którym akurat z wielką prędkością jechał z naprzeciwka wielki biały buick. Jego kierowca, starszy człowiek, zatrzymał się dopiero parę przecznic dalej. Wróciwszy na miejsce wypadku tłumaczył, że nie zauważył leżącego na jezdni człowieka; sądził, że trafił na wybój w asfalcie. Został zwolniony z braku dowodów winy.

Przewieziony do szpitala Carle Foundation Hospital w sąsiednim Urbana, Keiper został poddany bezskutecznej reanimacji. O godz. 18:22 stwierdzono formalnie zgon wskutek rozległych obrażeń, głównie ran głowy[15]. Potem okazało się, że w pracowni jego macierzystej firmy na kilku komputerach od

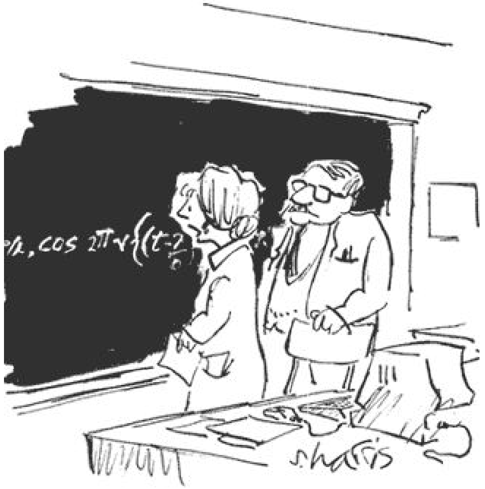
[15] Lokalna gazeta internetowa „Daily Illini Online Archive", http://www.illinimedia.com/di/archives/1995/January/20/driver-p3.html (plik wycofany).

wielu miesięcy „zapuszczonych” jest kilka programów w *Mathematice* testujących nowe algorytmy.

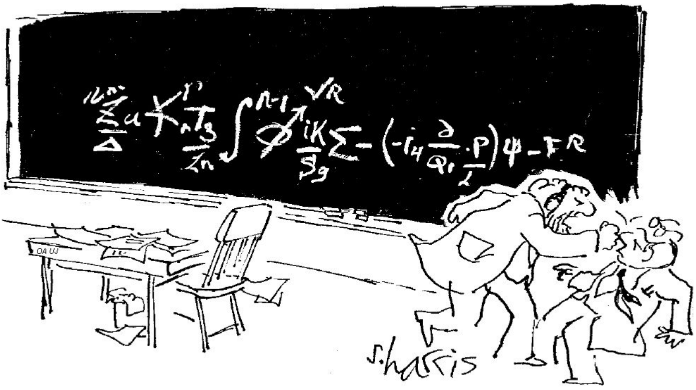
Dziś nazwisko Keipera znane jest tylko wąskiej grupie specjalistów. Ale z jego intelektualnych dokonań oraz z odkrytych przez niego algorytmów w każdej chwili korzystają rozsiani po świecie użytkownicy żywiołowo rozwijającego się już ponad dwadzieścia lat programu *Mathematica*, chociaż tylko nieliczni wśród nich zdają sobie z tego sprawę. Mógłby więc Keiper powtórzyć za Horacym: *Non omnis moriar*.

*

Na koniec dwa rysunki Sidneya Harrisa dotyczące dowodów matematycznych. Sporo zachodnich książek naukowych zamieszcza *cartoons* tego grafika, jako humorystyczne przerywniki. Znając poczucie humoru nieodżałowanego profesora Pelczara mogę mieć nadzieję, że zaakceptowałby takie nieznaczne naruszenie uświęconego tradycją stylu także w niniejszej publikacji.



To jest świetny dowód,
ale brakuje mu ciepła i uczucia.



Chcesz dowodu? Ja ci pokażę dowód!

Rys. 11 i 12. Autor: Sidney Harris, źródło: http://www.sciencecartoonsplus.com/pages/gallery.php.

Bibliografia

Baez-Duarte L., *On Maslanka's reprezentation for the Riemann zeta-function*, arXiv:math/0307214v1 [mathNT] 16 Juni 2003.

Borwein J., Bailey D., *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*, 2004.

Galar R., *Krajobraz z komputerem*, „Matematyka" 2010, 4.

Keiper J.B., *Power Series Expansions of Riemann's Zeta Function*, „Mathematics of Computations" 1992, 58, 198.

Maślanka K., *Ćwierć wieku od obalenia hipotezy Mertensa (1985). Refleksje na temat dowodu komputerowego*, „Prace Komisji Filozofii Nauk Przyrodniczych PAU", t. V, 2011.

Pólya G., *Odkrycie matematyczne. O rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań*, tłum. A. Góralski, WNT, Warszawa 1975.

Schumayer D., Hutchinson D.A.W., *Physics of the Riemann Hypothesis*, arXiv:1101.3116v1 [math-ph] 17 Jan 2011.

Steuding J., *Primzahlverteilung*, wykład z teorii liczb w Uniwersytecie Goethego we Frankfurcie.

Thomas Jan Stieltjes, [w:] B. Baillaud, H. Bourget, *Correspondance d'Hermite et Stieltjes*, Gauthier–Villars, Paris 1905.

Voronin S.M., *Theorem on the Universality of the Riemann Zeta Function*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. 39, s. 475–486. Przedruk w „Math. USSR Izv." 1975, 9.

Weinberg S., *Newtonianism, Reductionism and the Art of Congressional Testimony*, „Nature" 1987 (3 XII), 330.

Woon S.C., *Riemann zeta function is a fractal*, arXiv:chao-dyn/9406003 v1, 11 Jun 1994.