

Robert Janusz

Stulecie kosmologicznych prac Einsteina i de Sittera

Zagadnienia Filozoficzne w Nauce nr 63, 167-181

2017

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Stulecie kosmologicznych prac Einsteina i de Sittera

Robert Janusz

Akademia Ignatianum w Krakowie

The centenary of Einstein's and de Sitter's cosmological works

Abstract

In the article some philosophical issues regarding the emergence of the modern cosmology are discussed. The mathematical field equations enabled for the first time in the history to set a cosmological problem as a physical one. The “power” of mathematics was not easy to be read by the pioneers of cosmology. Also the philosophical perspective on the Universe changed in front of this “power” expressed by Einstein and de Sitter in their models. In the paper we propose also some new ideas related to the mathematics of cosmology as a physical science.

Keywords

cosmology; model; mathematics; Albert Einstein; Willem de Sitter

W roku 2017 obchodzimy rocznicę stulecia ogłoszenia dwóch prac kosmologicznych: Alberta Einsteina (1879–1955) przełomowych *Rozważań kosmologicznych na temat ogólnej teorii względności* (Einstein, 1917) oraz Willema de Sittera (1872–1934) *O względności bezwładności* (Sitter, 1917)¹.

Albert Einstein wygłosił swoje *Rozważania* 8 II 1917 roku na posiedzeniu Akademii Nauk w Berlinie, rozpoczynając tym samym nową naukę fizyczną, jaką stała się kosmologia relatywistyczna. Za M. Hellerem (1985) przypomnijmy ważne wydarzenia poprzedzające ten historyczny moment.

W roku 1905 Einstein opracował podstawy szczególnej teorii względności, podając właściwe znaczenie fizyczne dla wyników i ścieżek badawczych, które do niej zmierzały². W 1908 roku Hermann Minkowski (1864–1909), na 80. Zebraniu Niemieckich Przyrodników i Lekarzy w Kolonii wprowadził pojęcie czterowymiarowej czasoprzestrzeni, geometryzując w ten sposób szczególną teorię względności. Einstein podjął tę ideę przeczując, że po wprowadzeniu materii do takiej czasoprze-

¹ Artykuł ten był szeroko omawiany na zajęciach ks. prof. Michała Hellera (Papieska Akademia Teologiczna, 1994). W Ośrodku Badań Interdyscyplinarnych PAT przykładano dużą wagę do analizy oryginalnych prac wielkich uczonych, gdyż w rozważanych przez nich podstawowych kwestiach naukowych często kryją się głębokie wątki filozoficzne (o uniwersalnym znaczeniu). Zasadnicze informacje kosmologiczne, o ile nie zaznaczono inaczej, zaczerpnięte są z: M. Heller, *Ewolucja kosmosu i kosmologii, passim*.

² Uczonymi, którzy byli krok od odkrycia tej teorii byli: Hendrik A. Lorentz (1853–1928) oraz Henri Poincaré (1854–1912).

strzeni, pojawi się kwestia pola grawitacyjnego. Pole elektromagnetyczne, z analizy którego narodziła się szczególna teoria „absolutyzująca” stałość prędkości światła (a więc względność czasu i przestrzeni), domagało się płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego, zatem pole grawitacyjne mogłoby domagać się jakiejś innej „geometryzacji” czasoprzestrzennej.

Poznając geometrię Riemannowską i rachunek tensorowy, Einstein wszedł na właściwą ścieżkę badawczą. W 1915 roku napisał, stopniowo poprawiane, poprawne równania pola i dopracował swoją ogólną teorię względności, w której fizyczne pole grawitacyjne było powiązane z krzywizną czasoprzestrzeni. Równania te można zapisać na kilka sposobów, ale w poniżej postaci widać interakcje członów geometrycznego („metafizycznego”) i fizycznego (materii).

$$R^{uv} - \frac{1}{2} Rg^{uv} = \kappa T^{uv}.$$

Dzięki temu, że można te równania w przybliżeniu uznać za Poissonowskie, daje się przez to wyznaczyć stałą $\kappa = -8\pi G/c^4$. Gdyby nie wpływ de Sittera, Einstein chyba nigdy nie napisałby swojej pracy. Wcześniej twórca ogólnej teorii względności polemizował z de Sitterem na temat względności masy (zasady Macha), uważając, że ogólna teoria względności w modelu statycznym zawiera w sobie ową zasadę. De Sitter był przeciwnego zdania.

Einsteinowskie *Rozważania* nie przypominają traktatu matematycznego, lecz raczej filozoficzny. M. Heller zauważa, że

wyrastały one z Macha krytyki Newtonowskiej mechaniki oraz ze Spinozowskiego racjonalizmu. W mechanice klasycznej prędkość jest względna, ale przyspieszenie takim nie jest. Pozytywista Ernst Mach (1838–1916) chciał wyeliminować „metafizyczne” pojęcia nieempiryczne z nauki, do których zaliczał absolutny czas i przestrzeń. Wedle tego empiriokrytyka, bezwładność nie powinna być określana wykorzystując Newtonowskie przyspieszenie (odnoszące się do absolutnej przestrzeni), ale względem całej materii Wszechświata. Wcześniej Gottfried W. Leibniz (1646–1716) uważał, że czas i przestrzeń są relacjami w materialnym świecie, nie miałyby więc jakichś metafizycznych, absolutnych cech. Jednakże racjonalistyczny panteizm osiągnął szczyt w poglądach Barucha de Spinozy (1632–1677), który w filozofii uprawianej *more geometrico* doszedł do monizmu substancji, uznając Wszechświat za boga. Taki nieskończony Wszechświat byłby twórcą samego siebie na zasadach ściśle deterministycznych, wypływających z najogólniejszych idei filozoficznych. Einstein, za Spinozą, uważał Wszechświat za logicznie zamknięty, zaś za Machem sądził, że bezwładność (masa) pochodzi od oddziaływań danego ciała z wszystkimi innymi, czyli bezwładność nie byłaby własnością ciała, ale niejako relacją z otoczeniem. „Zasada Macha” poważnie inspirowała więc powstanie Einsteinowskiej ogólnej teorii względności.

Einstein był przekonany, że w ogólnej teorii względności zasada Macha jest spełniona, gdyż geometria czasoprzestrzeni zależy od materii. Bardzo się tu mylił, co wykazał mu właśnie de Sitter. Poniżej prześledzimy bardziej szczegółowo oba podejścia wyra-

żone w prezentowanych pracach oraz dołączymy do nich niektóre bardziej współczesne kwestie filozoficzne, które te prace stawiają.

1. Einsteinowska kosmologia relatywistyczna

Nie ulega wątpliwości, że ogólna teoria względności była genialnym dziełem Einsteina, któremu udało się dodatkowo po raz pierwszy sformułować problem kosmologiczny jako problem fizyczny. Dysponował on swoją teorią, w ramach której mógł sensownie zapytać o krzywiznę globalną, o geometrię Wszechświata jako całości. Jest to o tyle zaskakujące, że poczynione przy tym drastyczne (jak na skalę problemu) przybliżenia mające opisać cały fizyczny Wszechświat, są nader proste: jednorodność rozkładu materii (tzn. rozmieszczenie gwiazd uśrednione na dużych obszarach przestrzennych) i izotropowość (tzn. niezależność od kierunków w tejże przestrzeni), a baza empiryczna do wyjaśnienia – nader skąpa (przesunięcie prążków widmowych ku czerwieni, reliktove promieniowanie tła, wiek meteorytów); dodajmy, że teoria powinna podać także wyjaśnienie paradoksu Olbersa (tzn. dlaczego jednorodny Wszechświat nieskończony powinien świecić także nocą).

Einstein zastosował swoje równania do problemu kosmologicznego w 1917 r., wkomponowując w nie, jak powiedziano ogólnie, swoje poglądy filozoficzne. Uważał mianowicie, że Wszechświat jest niezmienny w czasie w tym sensie, że „filozofia” równań ogólnej teorii (jej równowaga między przestrze-

nią a materią) wymagała „korekty” polegającej na usunięciu kolapsu grawitacyjnego „gazu” gwiazd. Einstein dopisał więc do równań ogólnej teorii względności tzw. człon kosmologiczny odpowiedzialny za „odpychanie” (umożliwiłaby to np. jakaś hipotetyczna „ujemna masa”). Dopisanie członu z (małą – aby była zgodna z Układem Słonecznym) stałą λ nie zmienia dywergencji tensora T^{uv} .

Po odkryciu przez Hubble’a ucieczki galaktyk, czyli przestrzennego rozszerzania się Wszechświata, Einstein uznał człon kosmologiczny za największy błąd swojego życia. W 1932 roku, wraz z de Sitterem, zaproponowali płaski model (w sensie Friedmannowskich rozwiązań kosmologicznych) (por. Foster, Nightingale i Lipiński, 1985, s. 188n).

Model Einsteina-de Sittera wyróżniał się estetyką, która nie wyjaśnia jednak, dlaczego Wszechświat miałby takim być, jak przyjęli jego autorzy. Kosmos z przestrzenią Euklidesową jest jedynym spośród nieskończonego wielu z krzywiznami ujemnymi lub dodatnimi. Nasz Wszechświat, który – jak dziś wiemy – leży na granicy otwartych i zamkniętych, domaga się także naukowego uzasadnienia (por. Sokołowski, 2005, s. 212).

Dodatkowym problemem, który wypływał z ekspansji Wszechświata, stał się filozoficzny problem jego początku. Rozwiązania kosmologiczne cechowały się osobliwością początkową, ale czy można by ją usunąć? Teorię Einsteina zmodyfikował Cartan, wiążąc ją z teoriami pól fizycznych (rozwiązania ze spinem). W teoriach Einsteina-Cartana można pozbyć się osobliwości (por. Kopczyński i Trautman, 1984, s. 194, 197). W latach

sześćdziesiątych i siedemdziesiątych Roger Penrose (ur. 1931), Stephen Hawking (ur. 1942) i inni udowodnili szereg twierdzeń, z których wynika, że istnienie osobliwości w modelach kosmologicznych nie jest wynikiem upraszczających założeń (np. założenia jednorodności i izotropowości), lecz następstwem bardzo ogólnych własności modelu (por. Hawking i Ellis, 1973).

Kolejnym problemem była stała kosmologiczna, która przeżywała burzliwe dzieje filozoficznego sensu i bez-sensu, nawet u swego twórcy, Einsteina. Stała ta dziś okazuje się mieć znaczenie w kwantowych teoriach pola, a co wydaje się zdumiewające – zdaje się mieć związek z „metafizyczną” cztero-wymiarowością naszej czasoprzestrzeni³. Kosmiczna misja Planck pozwala na wyliczenie stałej kosmologicznej, preferując płaski Wszechświat, w którym dominuje ciemna materia i ciemna energia. Okazuje się zatem, że stała kosmologiczna nie była takim „strasznym” filozoficznym błędem, gdyż kryje się za nią najprawdopodobniej bardzo poważna fizyka.

³ J. Król i T. Asselmeyer-Maluga (Asselmeyer-Maluga i Król, 2013; Król, 2016) obliczyli wartość stałej kosmologicznej, posługując się analizą egzotycznych struktur różniczkowalnych właśnie na \mathbf{R}^4 . Okazuje się, że jedynie dla tego wymiaru (4) różniczkowalności te przejawiają niespotykane bogactwo struktur różniczkowych. Michael Freedman (ur. 1951) i Simon K. Donaldson (ur. 1957) przyczynili się (od 1982 r.) do poznania egzotycznych różniczkowalności na \mathbf{R}^4 . W pracy (Asselmeyer-Maluga i Król, 2013) autorzy, korzystając z niezmienników topologicznych struktur egzotycznych, obliczają z dokładnością do trzech miejsc znaczących. Zob. także pracę J. Króla, „Czy wiemy dlaczego czasoprzestrzeń na dużych skalach jest gładka i 4-wymiarowa?” opublikowaną w niniejszym tomie ZFN, ss. 101–111.

Stała kosmologiczna jest szeroko dyskutowana przez G. Elisa w jego znakomitej pracy o filozofii kosmologii. Autor (pod koniec p. 2.4.6) stwierdza, że równania grawitacyjne oraz obserwacje supernowych pozwalają wnioskować, że stała kosmologiczna lub jej równoważnik w formie „ciemnej energii”, choć są obecne, to jednak ich fizyczna natura pozostaje nieznana. Kwantowa teoria pola, wiążąca stałą kosmologiczną z zerową energią próżni, nie wystarcza jednak na wyjaśnienie zagadki „ciemnej energii” – cała fizyka jest więc tu nadal tajemnicza. To jednak nie stanowi przeszkody w rozwoju nauki; wręcz przeciwnie. Nawet prosty, de Sitterowski model, choć jest wieloznaczny ze względu na jego stałą krzywiznę, mimo to stanowi punkt wyjścia dla innych modeli kosmologicznych, np. dla wielu modeli inflacyjnych, ograniczanych silnie przez obserwacje WMAP (p. 9.2.7) (Ellis, 2006 *passim*; np. w 2.3.6 Ellis interpretuje stałą kosmologiczną jako „ciemną energię”). Kosmologia przyjmuje więc nadal „tajemnicze” elementy pochodzące z intuicji typu filozoficznego, a nie z ufundowanej uprzednio metody empirycznej. Inspirująca okazuje się tu – jak zwykle w fizyce – sama matematyka.

Gdyby (jak sugerują prace Króla *et al.*) stała kosmologiczna wynikała z czystej matematyki „czasoprzestrzennej” umożliwiającej mechanikę kwantową, byłoby to swoistym argumentem na „metafizyczność” kryjącą się w matematyczności czasoprzestrzeni, nie zaś w pozytywistycznych, empiriokrytycznych interpretacjach przestrzeni i czasu. Okazuje się, że jedyny scenariusz dopuszczający naszą fizyczność trójwymiarowej przestrzeni i jednowymiarowego czasu, określony byłby matematycznie, nie materialnie.

Dopowiedzmy jeszcze jedną rzecz, związaną z mechaniką kwantową, do której powstania przyczynił się Einstein. Można zapytać, czy mamy jakiś „kosmologiczny” dowód na jej słuszność, której nie uznawał Einstein? Co do tej kwantowo-mechanicznej pomyłki Einsteina można dodać, że po raz pierwszy udało się przetestować nierówności Bella na „kosmicznym układzie” wykorzystującym źródła astronomiczne do wykazania kwantowo-mechanicznych nielokalności nieznanymi kosmologii Einsteińskiej (por. Handsteiner i in., 2017).

Widzimy zatem, jak filozoficzne poglądy geniusza, Alberta Einsteina, wpłynęły na powstanie jego fizycznych teorii i przyczyniły się do zainicjowania kosmologii relatywistycznej. Widzimy jednak także to, że taka filozofia przyrody musiała (i nadal musi) kapitulować wobec tajemnic matematycznie badanego Kosmosu.

2. Analiza wybranych fragmentów *Rozważań...*

Przejdźmy teraz do analizy niektórych, ważniejszych partii artykułu Einsteina bardziej od strony naukowej. Na początku tekstu Einstein odwołuje się do „znanych powszechnie” własności Poissonowskiego równania różniczkowego, które należy do formalizmu Newtonowskiej dynamiki i opisuje pole grawitacyjne dla danego rozkładu gęstości materii. Jest to cząstkowe równanie różniczkowe, a więc dla rozwiązania domaga się ono podania tzw. przestrzennych warunków brzegowych, określających wartość wyjściową tego pola na brzegu rozważanego ob-

szaru. Można podać takie warunki dla lokalnych układów, matych w stosunku do „nieskończonego” Kosmosu – można wtedy uznać, że potencjały „zerują się w nieskończoności”. Einstein zdawał sobie sprawę z tego, że dla całości Wszechświata tego uczynić *a priori* nie można. Co ciekawe, w grawitacji Newtonowskiej tak tego problemu w ogóle postawić nie było można i m.in. dlatego nie była ona w stanie opisać całego fizycznego Kosmosu z nieskończonymi czasem i przestrzenią.

Ogólna teoria względności wprowadza elastyczną czasoprzestrzeń: materia – źródło pola grawitacyjnego – zakrzywia czasoprzestrzeń i Einstein dostrzegł, że można by rozważać Wszechświat jako „kontinuum zamknięte w swojej przestrzennej rozciągłości” (zakończenie §2.), wtedy niepotrzebne byłyby żadne warunki brzegowe: zamknięta przestrzeń eliminuje warunki brzegowe.

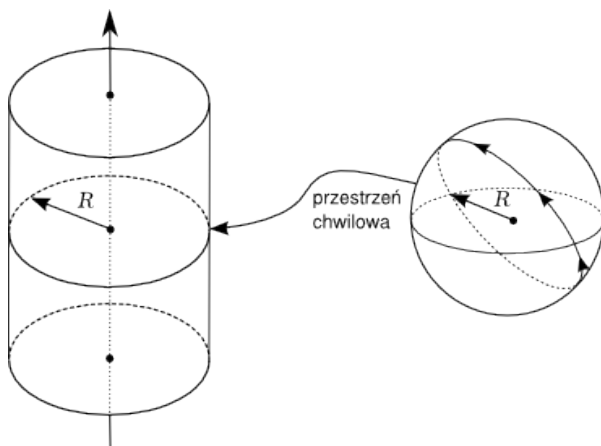
W §3. Einstein uzasadnia takie założenie, powołując się na analogię między kosmologami i geodetami: w pierwszym przypadku niezmiernie złożona struktura geometryczna Kosmosu może być uproszczona w takim sensie, jak Ziemię przybliża się elipsoidą. Można też, ze względu na małe prędkości gwiazd⁴, wprowadzić takie współrzędne, w których materia jest, po uśrednieniu, w spoczynku.

Kolejnym problemem, z którym przyszło się zmierzyć, był statyczny obraz Wszechświata jako całości (na co zwróciliśmy

⁴ Dziś wiemy, że to było bardzo grube przybliżenie, gdyż realistycznie odnosi się ono do gromad galaktyk.

uwagę powyżej, w części bardziej filozoficznej). Jak zauważa M. Heller (s. 20), którego szlakiem myśli tu przemierzamy, Einstein nawet nie podejrzewał, że Kosmos mógłby być inny, a tymczasem równania ogólnej teorii względności na to nie pozwalały, by Kosmos „spoczywał”. Tak więc racje filozoficzne skłoniły Einsteina do dopisania „członu kosmologicznego” – małej poprawki zgodnej z postulatami ogólnej teorii względności, która nie byłaby widoczna w skali Układu Słonecznego, ale „ratowała” statyczność Wszechświata jako całości zamkniętej w skończonej przestrzeni. Einstein wiedział dobrze, że stała λ jest potrzebna dla statyczności, nie do zamknięcia przestrzennego Wszechświata.

Wszechświat Einsteina jest więc skończony, ale nieograniczony. Czasoprzestrzeń rozpada się na czas i chwilowe przestrzenie, które mają ten sam promień krzywizny (statyczność). Tworzy to „hipercylinder”, którego uproszczenie pokazuje przytoczony rysunek.



Kosmologiczny model Einsteina okazał się niezgodny z obserwacjami, ale otworzył drogę do relatywistycznej kosmologii.

3. De Sittera pusta czasoprzestrzeń

Willem de Sitter (1872–1934) był holenderskim astronomem i matematykiem, dyrektorem Obserwatorium Astronomicznego w Lejdzie, założycielem stacji obserwacyjnej w Johannesburgu, inicjatorem ekspedycji astronomicznych, głównie do Kenii. Opracował wyniki 250-letnich obserwacji satelitów Jowisza. Jest autorem drugiego, po Einsteinie, modelu-rozwiązania problemu kosmologicznego. Model ten był całkowicie zaskakujący: opisuje pusty Wszechświat, a więc zasada Macha nie jest wkomponowana w Einsteinowskie równania; co więcej, czasoprzestrzeń jest „niefizyczna” – bez materii, a więc jakby „metafizyczna”, absolutna. Co ciekawe, również de Sitter szukał statycznego rozwiązania kosmologicznego. Sądził, że je znalazł, gdyż model ten rzeczywiście posiadał stałą krzywiznę czasoprzestrzeni. Jednakże – poza Einsteinowskim – inne statyczne wszechświaty nie istnieją (w tej klasie rozwiązań). Wybrane przez de Sittera współrzędne były podobne do Einsteinowskich, za wyjątkiem czasu, który tu reprezentowały krzywe. Taki stan rzeczy odpowiada Wszechświatowi pustemu, bez materii.

De Sitter nazwał Einsteinowskie podejście do zasady Macha „materialnym postulatem”, fizycznym, konkretnym (tzn.

masa będąca lokalnie miarą bezwładności wynika, czy lepiej powiedzieć: jest „indukowana” przez wszystkie masy znajdujące się globalnie we Wszechświecie). De Sitter zaproponował swój abstrakcyjny, „matematyczny postulat” odnoszący się do warunków brzegowych (matematyka!) i to „w nieskończoności” (odległe masy), polegający na tym, że można je zaniedbać, bo są „nieskończenie odległe”. W jego „Systemie B” jest to spełnione automatycznie, bo Wszechświat de Sittera jest pusty.

Nad modelem de Sittera pracował później m.in. ksiądz Georges-Henri Lemaître (1894–1966). Wprowadził on do modelu de Sittera nowe współrzędne, które pozwoliły rozłożyć czasoprzestrzeń na uniwersalny „kosmiczny czas” – wspólny dla swobodnych obserwatorów – oraz na chwilowe, jednorodnie przestrzenie, które okazały się płaskie, Euklidesowe, jednakże – jako przestrzenie chwilowe – nie są „statyczne” jak u Einsteina, ale zależą od czasu, ewoluują. Zasada Macha została wyrugowana, bowiem pusta przestrzeń może ewoluować. Lemaître pokazał, że umieszczone w takim Wszechświecie świecące „cząstki próbne” (nienaruszające jego pustej struktury) będą się widziały nawzajem jako poczerwienione, na skutek efektu Dopplera związanego z rozszerzaniem. Arthur S. Eddington (1882–1944) jako pierwszy przyjął założenie, że taka właśnie jest astrofizyka przesunięć ku czerwieni w obserwowanych widmach galaktyk. Model de Sittera, mimo że opisujący Wszechświat pusty, okazał się bardzo pożytecznym katalizatorem rozwoju kosmologii, choć dziś jest już raczej historycznym eksponatem i interesującym świadkiem początków kosmologii relatywistycznej.

Podziękowania

Autor składa wyrazy wdzięczności dla M. Hellera za cenne uwagi wykorzystane w niniejszym opracowaniu.

Bibliografia

- Asselmeyer-Maluga, T., Król, J., 2013. Decoherence in quantum cosmology and the cosmological constant. *Modern Physics Letters A*, [online] 28(34), s. 1350158. Dostępne na: <<http://arxiv.org/abs/1309.7206>> [ostatni dostęp 23.10.2017].
- Einstein, A., 1917. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, [online] s. 142–152. Dostępne na: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1917SPAW.....142E>> [ostatni dostęp 30.03.2016].
- Ellis, G.F.R., 2006. Issues in the philosophy of cosmology. *arXiv:astro-ph/0602280*. [online] Dostępne na: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0602280>> [ostatni dostęp 23.10.2017].
- Foster, J., Nightingale, J.D., Lipiński, S., 1985. *Ogólna teoria względności*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- Handsteiner, J., Friedman, A.S., Rauch, D., Gallicchio, J., Liu, B., Hosp, H., Kofler, J., Bricher, D., Fink, M., Leung, C., Mark, A., Nguyen, H.T., Sanders, I., Steinlechner, F., Ursin, R., Wengertsky, S., Guth, A.H., Kaiser, D.I., Scheidl, T., Zeilinger, A., 2017. Cosmic bell test: Measurement settings from Milky Way stars. *Physical Review Letters*, [online] 118(6), s. 60401. Dostępne na: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.060401>> [ostatni dostęp 23.10.2017].
- Hawking, S.W., Ellis, G.F.R., 1973. *The large scale structure of space-time*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Heller, M., 1985. *Ewolucja kosmosu i kosmologii*. Wyd. 2. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- Kopczyński, W., Trautman, A., 1984. *Czasoprzestrzeń i grawitacja*. Wyd. 2. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- Król, J., 2016. *Dziwna matematyczność Wszechświata*. [online] Dyskusja w Copernicus Center 19 XII 2016. Dostępne na: <<https://www.youtube.com/watch?v=pfVHoIMytQg>>.
- Sitter, W. de, 1917. On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis. *Proceedings of the Section of Sciences. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, [online] *XIX(9–10)*, s. 1217–1225. Dostępne na: <<http://www.archive.org/details/proceedingsofsec192koni>>.
- Sokołowski, L.M., 2005. *Elementy kosmologii: dla nauczycieli, studentów i dociekliwych uczniów*. Kraków: ZamKor.