Ryszard Rębowski

O liczbie π równej 3,1415926535897932384626433... z perspektywy teorii prawdopodobieństwa i nie tylko : część pierwsza

Zeszyty Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy 7, 29-51

2011

Zeszyty Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy
ISSN 1896-8333 nr 7/2011

Ryszard Rębowski
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy,
Wydział Zarządzania i Informatyki

O liczbie π równej 3.14159265358979323846… z perspektywy teorii prawdopodobieństwa i nie tylko

Część pierwsza

STRESZCZENIE

Zaprezentowano dorobek kilkunastu pokoleń matematyków, którzy swoimi badaniami przyczynili się do wyjaśnienia znaczenia i roli liczby π w matematyce. W części pierwszej pracy skoncentrowano się na metodach stosowanych w teorii funkcji rzeczywistych, geometrii i teorii liczb. W większości sytuacji starano się odtworzyć rozumowania i techniki rachunkowe, które doprowadziły do tak spektakularnych wyników jak w przypadku wzoru Leibnitza, wzorów Eulera czy związku liczby π z funkcją dzeta Riemanna. Przypomniano o innych sposobach reprezentowania liczby π na przykładzie metody iloczynu Wallisa i nieskończonych ułamków łańcuchowych Eulera. Wspomniano o miejscu liczby π w najpiękniejszym wzorze matematyki – wzorze Eulera oraz o jej związku z inną ważną liczbą, liczbą Eulera.

Słowa kluczowe: liczba π, szereg potęgowy, szereg harmoniczny, liczba pierwsza, ułamek łańcuchowy.

1. Wstęp

W artykule „3,14 – czyli imieniny liczby π” [Rębowski 2012] sygnalizowaliśmy, że w kolejnej pracy pokażemy szczegółowo zacytowane tam wyniki. Oczywiście każdy z nich jest dobrze znany i często cytowany w literaturze przedmiotu. Dlaczego w takim razie robimy to po raz kolejny? Argumentów „za” jest co najmniej kilka.

1. Pokazując uzasadnienia tych wyników, chcemy wyraźnie podkreślić zasygnalizowane w [Rębowski 2012] zjawisko głębokiego „usadowienia” liczby **π** w wielu współczesnych teoriach matematycznych.

2. Poruszana przez nas tematyka dotyczy wielu dyscyplin matematycznych. Zapoznanie się z nią wymagałoby od Czytelnika znajomości specjalistycznej wiedzy.

3. Studiowanie literatury poświęconej takiej tematyce dla niewtajemniczonego w arkana matematyki Czytelnika jest na ogół kłopotliwe, żeby nie powiedzieć trudne. Przedstawione dalej problemy wymagają bowiem zaawansowanej wiedzy i sprawności technicznej, a wszystko to odbywa się kosztem zaangażowanego czasu. Idąc naprzeciw oczekiwaniom Czytelnika, chcieliśmy cały ten proces uprościć i maksymalnie skrócić.

4. Wreszcie chcieliśmy osiągnąć cel podstawowy – spopularyzować ten aspekt wiedzy, bowiem co jak co, ale liczba $\boldsymbol{\pi}$ na pewno na to zasługuje.

Liczbę $\boldsymbol{\pi}$ często nazywa się *stałą Archimedesa*, aczkolwiek jej pochodzenie jest o wiele starsze[1]. Na pewno posługiwał się nią twórca geometrii euklidesowej – Euklides (365–300 p.n.e.) Niewątpliwie Archimedes (287–212 p.n.e.) był jednym z pierwszych, który zaczął badać liczbę $\boldsymbol{\pi}$ naukowo. Stosując metody geometrii, udało mu się oszacować jej wartość z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku. Nie ma natomiast żadnego dowodu na to, że oznaczał i nazywał tę liczbę tak jak współcześni, czyli $\boldsymbol{\pi}$-*ludolfina*. Symbol $\boldsymbol{\pi}$ wprowadzono do literatury przedmiotu dopiero w 1706 roku. Uznaje się, że zawdzięczamy to Williamowi Jonesowi (1675–1749), który zaproponował używania greckiej litery ***pi*** dla oznaczenia stałej Archimedesa. Zrobił to w swoim dziele Synopsis Palmariorum Mathesos. Dla podkreślenia geometrycznego pochodzenia tej liczby, czyli obwodu, użył pierwszej litery Słowa *perimetron* z greckiego $\pi\rho\iota\mu\tau\rho\sigma\upsilon$. Spotkało się to ze zrozumieniem ówczesnego świata nauki, a kropkę nad „i" postawił Euler, wyrażając swoją aprobatę. Z kolei termin *ludolfina* odnosi się do matematyka niemieckiego Ludolpha van Ceulena (1540–1610), który jako jeden z pierwszych nowożytnych uczonych zajmował się obliczeniem wartości liczby $\boldsymbol{\pi}$. Dopiero w 1761 roku Johan Heinrich Lambert (1728–1777), matematyk szwajcarski francuskiego pochodzenia, udowodnił, że liczby tej nie można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych. Tym samym pokazał, że jest liczbą niewymierną. Stało się więc jasne, dlaczego ani Archimedesowi, ani Ceulenowi i innym nie udało się ustalić jej wartości. Co więcej, okazało się, co pokazał w 1882 r. Ferdinand Lindemann (1852–1939), że jest ona *liczbą przestępną*, czyli nie może być pierwiastkiem *równania algebraicznego* o współczynnikach całkowitych[2]. Ma to swoje konsekwencje w postaci nawet niemożliwości zapisania $\boldsymbol{\pi}$ za pomocą skończonego zapisu złożonego z liczb całkowitych, działań arytmetycznych, ułamków oraz potęg i pierwiastków. Z geometrycznego punktu widzenia odkrycie to ostatecznie rozstrzyga, że niemożliwa jest klasyczna konstrukcja (przy pomocy linijki i cyrkla) kwadratu o powierzchni równej powierzchni danego koła. Problem ten nazywany jest w literaturze przedmiotu *kwadraturą koła*.

Wszystkie fakty historyczne zaczerpnęliśmy z cytowanej literatury. Na szczególną uwagę zasługują wydawnictwa: [Boyer 1964, Cajori 1994, Courant i Robbins 1962, Downing

---

[1] Znane są dowody świadczące o korzystaniu z własności liczby π już w starożytnym Babilonie. Odkryto, że na jednej z kamiennych tablic, datowanej na lata 1900–1680 p.n.e. pojawia się opis wartości obwodu koła o średnicy 1, przybliżony przez wartość 3,125.

[2] Równania, które powstaje z przyrównania wielomianu do zera.

1995, Merzbach i Boyer 2010, Tanton 2005, Weisstein 1989]. Czytelnika zachęcamy również do lektury [Aczel 1998, Guedj 2001] oraz do skorzystania z zasobów źródła internetowego http://mathworld.wolfram.com. Artykuł z przyczyn technicznych składa się z dwóch części. Strukturalnie podzielony został na pięć rozdziałów. Przedstawione w części 2 zdjęcia uczonych pobrano z repozytorium wolnych zasobów *Wikimedia Commons*.

2. Liczba π w teorii funkcji rzeczywistych

π jest liczbą niewymierną, o czym wiadomo co najmniej od 1761 roku. To właśnie dlatego trudno jest posługiwać się **π** w obliczeniach numerycznych czy w technice. Wymaga to bowiem używania jej wartości przybliżonej, np. 3,14159, ale również czasami rozwinięciem postaci

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559…,

a w konsekwencji kontroli dokładności takiego rachunku. Dla matematyki taka aproksymacja jest niedostateczna, co stało się wyzwaniem dla wielu pokoleń matematyków. Dociekliwego Czytelnika odsyłamy w tym miejscu do lektury bardzo znanej w literaturze przedmiotu książki E. Couranta i H. Robbinsa *Co to jest MATEMATYKA* oraz do strony internetowej http://mathworld.wolfram.com.

Skoro liczby **π** nie można zapisać w *notacji pozycyjnej*[3], zaczęto poszukiwać metod i technik rachunkowych pozwalających tę trudność obejść. Stało się to za sprawą wielu matematyków, wśród nich na uwagę na pewno zasługują: P. Fermat (1601–1665), I. Newton (1643–1727), G.W. Leibnitz (1646–1716), B. Taylor (1685–1731), L. Euler (1707–1783), J.B.J. Fourier (1768–1830), C.F. Gauss (1777–1855), A. Cauchy (1789–1857), B. Riemann (1826–1866), J. Hadamard (1865–1963), S. Ramadujan (1887–1920) i inni. Przełomem stało się zdefiniowanie pojęcia *zbieżności* ciągu liczbowego oraz jego uogólnienie na przypadek funkcji rzeczywistych. Pozwoliło to spośród wszystkich funkcji rzeczywistych wybrać te „dobre", czyli *funkcje ciągłe*. Stąd był już mały krok, chociaż w historii matematyki okazał się on krokiem milowym, w kierunku *funkcji gładkich*, czyli *różniczkowalnych*. Mariaż teorii szeregów z uzyskanymi wynikami rachunku różniczkowego oraz teorii całki zaowocował zaistnieniem potężnego narzędzia – *teorii szeregów funkcyjnych*, w tym *szeregów potęgowych* i *szeregów Fouriera*. O możliwościach tej teorii w badaniu zagadnień teorio-liczbowych napiszemy dalej.

---

[3] Wcale to nie oznacza, że zaprzestano zajmować się tym problemem. Dość sugestywnie przedstawiono to np. w filmie zatytulowanym „π" Darrena Aronofskiego z 1998 r. Ponadto dalej trwają poszukiwania dokładniejszych rozwinięć π (patrz np. http://mathworld.wolfram.com, 28.09.2011.).

2.1. Rozwinięcie funkcji *arctg* i wzór Leibniza na π

Weźmy funkcję
$$\mathbf{R} \ni x \longrightarrow arctg(x) \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big).$$

Przypomnijmy, że funkcja ta powstaje w wyniku wzięcia funkcji odwrotnej do pierwszej gałęzi funkcji trygonometrycznej *tangens*. Oznacza to, że jej wykres wygląda tak jak na rys. 1. Z podstaw rachunku różniczkowego wiadomo, że

$$\Big(arctg(x) \Big)' = \frac{1}{1+x^2}, \text{ dla wszystkich rzeczywistych } x.$$

Wynik tego różniczkowania należy skojarzyć z *ciągiem geometrycznym*, dokładniej z jego skończoną sumą. Z matematyki elementarnej wiadomo, że dla ciągu

$$1, q, q^2, \dots, q^{n-1},$$

dla $q \neq 1$, S_n – suma jego wyrazów ma postać

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q},$$

co po prostym przekształceniu daje

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + \dots + q^{n-1} + \frac{q^n}{1-q} \; .$$

Stosując powszechnie używaną konwencję sumowania, ostatni wzór zapiszemy następująco

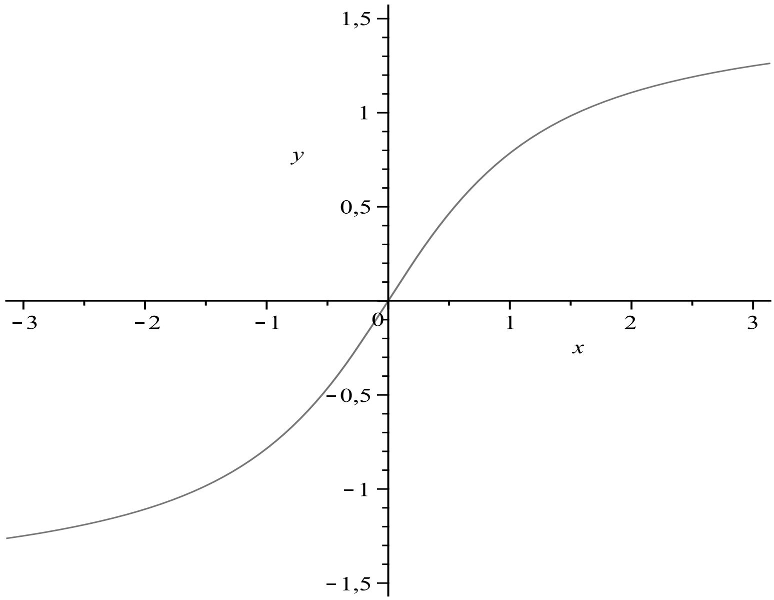
$$\frac{1}{1-q} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j + \frac{q^n}{1-q}.$$

Jeśli teraz dokonamy podstawienia $q = -x^2$, to otrzymamy pochodną funkcji *arctg* (q zawsze jest różne od jedności dla każdego x), czyli

$$\Big(arctg(x) \Big)' = \sum_{j=0}^{n-1} (-x^2)^j + \frac{(-x^2)^n}{1+x^2}$$

lub równoważnie

$$\Big(arctg(x) \Big)' = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j x^{2j} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} \text{ dla } x \in \mathbf{R}.$$



Rys. 1. Wykres funkcji *arctg*

Scałkujmy tę równość obustronnie po przedziale jednostkowym [0, 1]. Z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego *Riemanna–Newtona–Leibniza*, *liniowości całki* i faktu, że $\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$ dla wszystkich naturalnych *k*, dostaniemy

$$arctg1 - arctg0 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx.$$

Ponieważ $arctg1 = \frac{\pi}{4}$, $arctg0 = 0$, więc ostatnia równość, po zastosowaniu konwencji sumacyjnej, oznacza, że

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx.$$

Daje to nam przybliżenie liczby $\frac{\pi}{4}$ sumą $\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}$ z dokładnością ϵ_n, gdzie

$$\epsilon_n = |(-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx| = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx.$$

Pozostaje zbadać zbieżność ciągu (ϵ_n). Z definicji $\epsilon_n \geq 0$ dla każdego *n*.

Z drugiej strony, jeśli spojrzymy na funkcję

$$f(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^2}, \ x \in [0,1],$$

to ponieważ $1 + x^2 > 0$ oraz $x^{2n} \geq 0$,

$$f(x) \leq x^{2n}, \ x \in [0,1].$$

Z interpretacji geometrycznej całki wynika, że $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 x^{2n}dx$ i dlatego

$$\epsilon_n \leq \int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1}.$$

Ponieważ wyrazy ciągu (ϵ_n) są nieujemne, więc powyższa nierówność pozwala wykorzystać znane kryterium zbieżności ciągu – *twierdzenie o trzech ciągach*. Oznacza to, że $(\epsilon_n) \to 0$. W takim razie z twierdzenia o *granicy sumy* dwóch ciągów dostaniemy

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}.$$

Wykorzystując pojęcie *szeregu liczbowego* i jego *sumy*, ostatnią równość możemy zapisać następująco

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1},$$

co oznacza, że liczba $\boldsymbol{\pi}$ jest równa czterokrotnej sumie *naprzemiennego* szeregu odwrotności kolejnych liczb nieparzystych. W literaturze powyższa równość znana jest jako *wzór Leibniza*. Było to pierwsze takie przedstawienie liczby $\boldsymbol{\pi}$.

2.2. Szeregi harmoniczne a liczba π

Wśród szeregów liczbowych o wyrazach dodatnich ważną rolę odgrywają tzw. *szeregi α–harmoniczne*, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \ \text{gdzie } \alpha > 0.$$

Dobrze wiadomo, że dla $\alpha \in [0, 1]$ szeregi te są *rozbieżne*, natomiast dla $\alpha > 1$ już są *zbieżne*. Pozwala to, jak zauważył Riemann, zdefiniować funkcję nazywaną funkcją ζ *Riemanna* [4], czyli

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \ \alpha > 1.$$

Przykładem rozbieżnego szeregu α–harmonicznego jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, nazywany *szeregiem harmonicznym*. Zjawiska opisane szeregiem harmonicznym znane były w jakimś sensie już starożytnym. Pojawiały się jako *paradoks Zenona z Elei* (490 rok p.n.e.). Zanim zajmiemy się związkiem między szeregami α–harmonicznymi a liczbą $\boldsymbol{\pi}$, podamy przykład jednej z wersji takiego paradoksu.

---

[4] Z funkcją tą, a tak naprawdę z jej zespolonym rozszerzeniem związana jest słynna, bowiem nie rozstrzygnięta do tej pory, *hipoteza Riemanna*. Jej znaczenie jest ważne w teorii liczb pierwszych.

Mówi on o Archimedesie, który ściga podążającego przed nim żółwia. Sprecyzujmy warunki, w jakich odbywa się ta rywalizacja.

1. Archimedes jak i żółw poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

2. W chwili zero Archimedes znajduje się w punkcie A odległym od punktu Z, w którym znajduje się żółw.

3. Odległość punktu A od Z wynosi d_o.

4. Jeśli v_A i v_Z oznaczają odpowiednio prędkość Archimedesa i żółwia, to $v_A = \beta v_Z$ dla $\beta > 1$ (przecież Archimedes nie poruszał się w żółwim tempie).

Zajmijmy się najpierw analizą logiczną zjawiska tego pościgu. W chwili zero obaj ruszają przed siebie, ruchem jednostajnym prostoliniowym[5]. Po pewnej chwili, powiedzmy t_1 Archimedes dotrze do punktu Z. W tym czasie żółw przebędzie drogę, która zaprowadzi go do punktu Z_1, różnego od Z. W kolejnym kroku analizy Archimedes po kolejnej chwili t_2 dotrze do punktu Z_1, z kolei żółw oddali się do nowego punktu Z_2 itd. Ponieważ nie ma powodu, aby twierdzić, że iteracje tego zjawiska kiedyś zakończą się, przecież oboje, Archimedes, jak i żółw, poruszają się zgodnie ze sformułowanymi zasadami, nie ma podstaw twierdzić, że Archimedes kiedykolwiek dogoni żółwia. Z drugiej strony, chociażby z autopsji wiemy, że taki pościg zakończy się zawsze sukcesem i jest to tylko kwestią czasu. W takim razie przedstawione wyżej rozumowanie wyklucza istnienie ruchu! O co tutaj chodzi?

Aby definitywnie rozstrzygnąć kwestię przedstawionego pościgu, przeprowadzimy jego analizę numeryczną, czyli ilościową. W tym celu wprowadźmy następujące oznaczenia:

• d_n dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ niech oznacza długości odcinków AZ, ZZ_1, Z_1Z_2, …;

• t_n dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ czas, jaki potrzebuje Archimedes i żółw na przebycie kolejnych odcinków.

Z założenia $v_A = \beta v_Z$ i $d_o = V_A t_o$ oraz $d_1 = v_Z t_o$, bowiem odcinki AZ i ZZ_1 oboje pokonują w czasie t_o. Ponieważ wtedy $t_o = \frac{d_o}{v_A}$, więc

$$d_1 = v_Z \frac{d_o}{v_A} = \frac{v_A}{\beta}\frac{d_o}{v_A} = \frac{d_o}{\beta}.$$

Podobnie, ponieważ $d_1 = v_A t_1$ i $v_A t_1 = v_Z t_o$ (Archimedes i żółw przebywają odcinek ZZ_1), więc $t_1 = \frac{v_Z}{v_A} t_o$ i dlatego

$$d_2 = v_Z t_1 = v_Z \frac{v_Z}{v_A} t_o = \left(\frac{v_A}{\beta}\right)^2 \frac{1}{v_A}\frac{d_o}{v_A} = \frac{d_o}{\beta^2}.$$

I ogólnie, powtarzając powyższe rozumowanie, otrzymamy, że $d_n = \frac{d_o}{\beta^n}$ dla wszystkich naturalnych n. Dostaliśmy więc szereg liczbowy o wyrazie ogólnym d_n, który jest zbieżny. Jeśli przez S oznaczymy jego sumę, to

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = d_o \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} = d_o \frac{1}{\beta - 1}.$$

---

[5] Umówmy się, że dla uproszczenia pomijamy wstępną fazę ruchu, kiedy to występują przyspieszenia.

Wtedy S jest całkowitą drogą przebytą przez żółwia w tej wędrówce. W tym samym czasie Archimedes pokona drogę równą

$$S + d_o = d_o \frac{1}{\beta - 1} + d_o = d_o \frac{\beta}{\beta - 1},$$

na końcu której dogoni żółwia! Zatem nie jest tak, jak tłumaczy to logika, która w swoim rozumowaniu nie uwzględnia efektu zbieżności, a tylko nieskończone pojawianie się wartości dodatnich. Ruch w takim razie jednak istnieje!

Wracamy do naszego głównego problemu tego rozdziału – związku pomiędzy liczbą π a szeregami α–harmonicznymi. Weźmy jeszcze raz wzór na pochodną funkcji *arctg* otrzymany w podrozdziale 1.1

$$\Big(arctg(x)\Big)' = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j x^{2j} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1 + x^2} \text{ dla } x \in \mathbf{R}.$$

Ustalmy $t \in [0,1]$ i scałkujmy tę równość obustronnie po przedziale $[0, t]$

$$\int_0^t \Big(arctg(x)\Big)' dx = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \int_0^t x^{2j} dx + (-1)^n \int_0^t \frac{x^{2n}}{1 + x^2} dx.$$

Licząc każdą z całek, otrzymamy

$$arctg(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{2j + 1} + (-1)^n \int_0^t \frac{x^{2n}}{1 + x^2} dx.$$

Szykujemy się do wykonania przejścia granicznego przy $n \to \infty$. W tym celu skorzystamy z oszacowania, które w podobnej wersji pojawiło się w podrozdziale 2.1

$$|arctg(t) - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{2j + 1}| = \int_0^t \frac{x^{2n}}{1 + x^2} dx \le \int_0^t x^{2n} dx = \frac{t^{2n+1}}{2n + 1} \le \frac{1}{2n + 1},$$

co pokazuje, że dla $x \in [0, 1]$

$$arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}.$$

Jest to tzw. *rozwinięcie w szereg potęgowy,* zwany też szeregiem Taylora–Maclaurina, funkcji *arctg*.

Euler zauważył, że szereg ten (jak i wiele mu podobnych) można poddać pewnemu przekształceniu[6], w wyniku czego dostaniemy

$$arctg(x) = \frac{x}{1 + x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n + 1)!!} \Big(\frac{x^2}{1 + x^2} \Big)^n,$$

[6] Mowa tutaj o *przekształceniu Eulera* (patrz np. [Fichtenholz 1976]). Niestety, ale zaprezentowanie jego treści wykracza poza ramy tego artykułu.

gdzie symbolem $(2n)!!$ (odpowiednio $(2\ \ +1)!!$) oznaczyliśmy iloczyn kolejnych liczb parzystych (nieparzystych) od 2 do $2n$ (od 1 do $2n+1$). Na przykład

$$7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105, \quad 6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48.$$

Powyższą równość przekształcamy dalej. Zaczniemy od zamiany zmiennych, podstawiając $x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ dla $t \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$. Niech liczba $s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$będzie taka, że

$$arctg \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = s.$$

Wtedy, z definicji funkcji *arctg* i *tg* oraz uwagi, że $cos(s) > 0$ dla wybranego s, dostaniemy kolejno

$$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = tg(s) = \frac{sin(s)}{cos(s)} = \frac{sin(s)}{\sqrt{cos^2(s)}} = \frac{sin(s)}{\sqrt{1 - sin^2(s)}}.$$

Rozwiązując tę proporcję, otrzymamy $t^2 = sin^2(s)$, skąd $t = sin(s)$, bowiem t oraz $sin(s)$ jest nieujemne. Oznacza to, że $s = arcsin(t)$ i dlatego

$$arctg \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = arcsin(t).$$

Aby dokonać zamiany zmiennych we wzorze na *arctg* musimy jeszcze wyrazić $\frac{x}{1+x^2}$ oraz $\frac{x^2}{1+x^2}$ za pomocą t. Wygląda to następująco

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{t(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} = t\sqrt{1-t^2},$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{t^2}{1-t^2}(1-t^2) = t^2.$$

Po zamianie zmiennych we wzorze na *arctg* dostaniemy

$$arcsin(t) = t\sqrt{1-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} t^{2n},$$

albo po przekształceniu

$$\frac{arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} t^{2n+1}, \text{ dla } t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Niestety, ale na tym nie koniec. Już z dotychczasowych wyników widać, że Euler był wirtuozem techniki rachunkowej. Zobaczmy, co uczynił dalej. Zaczął od obustronnego scałkowania po przedziale [0, s], gdzie $s \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, całkując prawą stronę wyraz po wyrazie[7], czyli

$$\int_0^s \frac{arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \int_0^s t^{2n+1}dt.$$

Dla pierwszej całki wystarczy zauważyć, że ponieważ funkcja pierwotna jest równa $\frac{1}{2}\Big(arcsin(t)\Big)^2$, jej wartość wynosi

$$\frac{1}{2}\Big(arcsin(s)\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{s^{2n+2}}{2n+2}.$$

Na szeregu występującym po prawej stronie wzoru dokonamy kolejnego przekształcenia – zamienimy zmienne, podstawiając $2k = 2n+2$. Wtedy wartości wskaźnika sumacyjnego będą zmieniały się od 1 do ∞ i dlatego

$$\frac{1}{2}\Big(arcsin(s)\Big)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\frac{s^{2k}}{2k}.$$

Światełko w tunelu zobaczymy, jeśli zauważymy, że ciąg $\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\frac{1}{2k}$ można zapisać za pomocą silni. Istotnie, z definicji operacji !! mamy

$$\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\frac{1}{2k} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2k-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2k-1)\cdot 2k}.$$

Ale

$$2{\cdot}4{\cdot}6{\cdot}8{\cdot}\ldots{\cdot}(2k-2) = 2(2{\cdot}2)(2{\cdot}3)(2{\cdot}4)\ldots 2(k-1) = 2^{k-1}1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}\ldots{\cdot}(k-1) = 2^{k-1}(k-1)!$$

Podobnie

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2k-1)\cdot 2k = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k-1)2k}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2k-2)} = \frac{(2k)!}{2^k(k-1)!}.$$

Dlatego

$$\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\frac{1}{2k} = \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}2^{2k-2}.$$

Wracając do głównego rachunku, otrzymamy

$$\frac{1}{2}\Big(arcsin(s)\Big)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}(2s)^{2k-2}$$

lub równoważnie

$$2\Big(arcsin(s)\Big)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}(2s)^{2k} \text{ dla } s \in \Big[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big].$$

---

[7] Oczywiście Euler wcześniej wykazał, że tak można (patrz np. [Fichtenholz 1976]).

Przyjmując w ostatnim wzorze $s = \frac{1}{2}$, ponieważ $sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, dostaniemy

$$\frac{\pi^2}{18} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}.$$

Zaraz, zaraz, przecież miał być szereg α–harmoniczny. Domyślamy się, co chcemy napisać. Euler wykazał[8], że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!},$$

co pozwala nam ostatecznie podać treść słynnego wzoru Eulera

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

W rozdziale 3 wzór ten pozwoli nam rozwiązać ciekawy problem liczb względnie pierwszych.

2.3. Liczba π a liczby pierwsze

Czas, aby dokładniej przyjrzeć się funkcji dzeta Riemanna. Euler jako pierwszy zauważył, że istnieje związek pomiędzy tą funkcją a zbiorem *liczb pierwszych*. Przypomnijmy, że liczby pierwsze to takie liczby naturalne $p > 1$, których rozkład na czynniki pierwsze jest trywialny, czyli ma postać $p = 1 \cdot p$. Dlatego na przykład liczby 2, 3, 5, 7, 11 są liczbami pierwszymi. Oznaczmy zbiór wszystkich liczb pierwszych przez **P**. Już Euklides zauważył, że zbiór liczb pierwszych nie może być skończony. Euklides rozumował następująco: gdyby tak nie było, to $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. W takim razie liczba $n = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ na pewno nie mogłaby być pierwsza, bowiem nie należy do zbioru **P**. Z drugiej strony, przy dzieleniu przez każdą liczbę pierwszą p_j liczba n daje resztę 1, stąd jej rozkład na czynniki pierwsze ma postać $n = 1 \cdot n$. W takim razie musi być liczbą pierwszą, co przeczy temu, że zbiór **P** jest skończony. Dlatego zbiór liczb pierwszych nie jest skończony. Euklides zauważył więcej, co przeszło do historii literatury przedmiotu pod nazwą twierdzenia o faktoryzacji (patrz np. [Sierpiński 1965]). Udowodnił bowiem, że każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić w postaci $n = p_1 p_2 \dots p_n$, gdzie $p_j \in$ P, $k \geq 1$ i rozkład ten jest jedyny.

Po tym wstępie wróćmy do funkcji dzeta. Ustalmy liczbę pierwszą p. Wtedy dla każdego $s > 1, 0 < \frac{1}{p^s} < 1$ i dlatego dla nieskończonego ciągu geometrycznego $\left(\frac{1}{p^{ks}}\right)_{k\geq 1}$ mamy

$$1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

[8] Szczegóły tego rozumowania pominiemy. Można je znaleźć np. w [Fichtenholz 1976].

Przypuśćmy, że czynność tę powtórzyliśmy dla n kolejnych liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (pamiętamy, że **P** jest zbiorem nieskończonym). Pomnóżmy stronami otrzymane równania przez siebie, czyli

$$\Big(\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{1}{p_1^{k_1 s}}\Big)\Big(\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{1}{p_2^{k_2 s}}\Big)\cdots\Big(\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{1}{p_n^{k_n s}}\Big)=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1^s}}\frac{1}{1-\frac{1}{p_2^s}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}.$$

Spójrzmy na lewą stronę ostatniej równości. Z zasady rozdzielności mnożenia względem dodawania i twierdzenia o *granicy iloczynu*, po lewej stronie dostaniemy sumę wyrażeń postaci

$$\frac{1}{p_1^{j_1 s}}\frac{1}{p_2^{j_2 s}}\cdots\frac{1}{p_r^{j_r s}}=\frac{1}{(p_1^{j_1}p_2^{j_2}\cdots p_r^{j_r})^s}.$$

Z twierdzenia Euklidesa o faktoryzacji wynika, że iloczyny $p_1^{j_1}p_2^{j_2}\ldots p_r^{j_r}$ generują zbiór liczb naturalnych większych od jedności. Ponieważ w sumie po lewej stronie jest również składnik równy 1, więc lewa strona dla dostatecznie dużego n będzie miała postać

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{k^s}.$$

W takim razie, przechodząc do granicy przy $n\to\infty$, dostaniemy

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_j^s}}.$$

W matematyce ostatnią granicę nazywa się *iloczynem nieskończonym*, co zapisuje się symbolicznie $\prod_{j=1}^{\infty}$. Dlatego dla funkcji dzeta Riemanna mamy równość

$$\zeta(s)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_j^s}}\ \text{dla}\ s>1.$$

Ponieważ wiemy, że $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, mamy kolejną, należącą również do Eulera, reprezentację liczby $\boldsymbol{\pi}$, tym razem związaną z liczbami pierwszymi

$$\frac{\pi^2}{6}=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_j^s}}.$$

2.4. Iloczyn Wallisa jako reprezentacja $\boldsymbol{\pi}$

Do tej pory głównie pokazywaliśmy metody prowadzące do wyreprezentowania liczby $\boldsymbol{\pi}$ za pomocą szeregów liczbowych. Nie ulega wątpliwości, że w zdecydowanej większości przypadków stało się to za sprawą wielkiego Eulera. Nie tylko jednak on przeszedł do historii matematyki jako odkrywca takich zależności. Na uwagę zasługuje również oryginalny wynik J. Wallisa (1616–1703), którym właśnie teraz zajmiemy się. Istnieje wiele sposobów uzyskania wyniku Wallisa. Jak zwykle prym wiedzie tutaj Euler. Metoda, którą zaprezentujemy, wydaje się być najprostsza, bowiem technicznie najmniej wymagająca i trochę zapomniana. Tym bardziej warta jest odświeżenia.

Pomysł polega na tym, aby skonstruować pewien regularny ciąg liczbowy[9] biorący się z scałkowania funkcji sin^n. Dokładniej, niech

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx, \text{ dla } n \geq 0.$$

Nie ma większego problemu z pierwszymi dwoma wyrazami tego ciągu, bowiem $a_0 = \frac{\pi}{2}$ oraz

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)dx = -cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Zapamiętajmy te wyniki, dalej będą nam potrzebne. W takim razie weźmy teraz $n \geq 2$. Ponieważ $sin^n(x) = sin^{n-1}(x)sin(x)$, więc mamy do czynienia z klasyczną sytuacją – funkcja podcałkowa jest iloczynem i możemy próbować zastosować metodę *całkowania przez części* (patrz np. [Fichtenholz 1976]). Postępując zgodnie z procedurą, bierzemy rozkład

$$\begin{aligned} u &= sin^{n-1}(x), & dv &= sin(x)dx \\ du &= (n-1)sin^{n-2}(x)cos(x), & v &= -cos(x). \end{aligned}$$

Ze wzoru na całkowanie przez części dostaniemy teraz

$$a_n = -cos(x)sin^{n-1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)cos^2(x)dx.$$

Pozwala to nam napisać

$$a_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)(1 - sin^2(x))dx =$$

$$-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)dx.$$

Po uporządkowaniu dostaniemy

$$a_n = -(n-1)a_n + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)dx,$$

co ostatecznie daje

$$a_n = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)dx = \frac{n-1}{n}a_{n-2}.$$

[9] Ciągi takie nazywamy rekurencyjnymi (patrz np. [Rębowski 2009]).

Aby wyznaczyć kolejne (dla $n \geq 2$) wyrazy tego ciągu, posłużymy się wielokrotnie powyższą zależnością. Dla $n = 2$ wygląda to prosto, bowiem

$$a_2 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}.$$

Dla $n > 2$ przebiega to tak

$$a_n = \frac{n-1}{n}a_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-2-1}{n-2}a_{n-4}.$$

Rozważymy teraz dwa przypadki, kiedy n jest parzyste i nieparzyste. W sytuacji pierwszej, powtarzając odpowiednią ilość razy powyższy rachunek, otrzymamy

$$a_n = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{1}{2}a_o = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}.$$

Jeśli teraz n jest nieparzyste, to wyglądało to będzie następująco

$$a_n = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}a_1 = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}.$$

Dalej wygodniej będzie zapisać oba wzory, przedstawiając liczbę parzystą jako $2n$, nieparzystą $2n + 1$. Otrzymamy to w wyniku podstawienia w tych wzorach zamiast n odpowiednio $2n$ i $2n + 1$. Wtedy wyrazy parzyste ciągu (a_n) będą miały postać

$$a_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2},$$

natomiast nieparzyste

$$a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}.$$

Dla dalszego rozumowania istotne wydaje się być zauważenie, że ciąg (a_n) zachowuje się monotonicznie, czyli

$$0 < a_{2n+1} \leq a_{2n} \leq a_{2n-1}.$$

Wynika to wprost z jego definicji i własności funkcji *sin* dla argumentu z przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ponieważ wtedy $sin(x) \in [0, 1]$, więc

$$sin^{2n+1}(x) \leq sin^{2n}(x) \leq sin^{2n-1}(x),$$

co z monotoniczności całki uzasadnia monotoniczność ciągu (a_n). W takim razie mamy

$$1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \leq \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}.$$

Czas wykorzystać uzyskane wyniki. Z otrzymanych wzorów na a_{2n} i a_{2n+1} i nierówności $1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$ wynika, że

$$1 \leq \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n}\frac{2n-1}{2n-2}\frac{2n-3}{2n-4}\cdot\frac{3}{2},$$

co możemy zapisać następująco

$$1 \leq \frac{2n+1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-1}{2n-2}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-3}{2n-4}\cdots\frac{5}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}.$$

Analogicznie dla ilorazu $\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$ możemy zapisać

$$\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} = \frac{a_{2(n-1)+1}}{a_{2n+1}} = \frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-3}\frac{2n-6}{2n-5}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{2n+1}{2n}\frac{2n-1}{2n-2}\frac{2n-3}{2n-4}\cdots\frac{3}{2},$$

co po skróceniu daje

$$\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}.$$

Z przedstawionych wyżej rachunków wynika, że

$$1 \leq \frac{2n+1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-1}{2n-2}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-3}{2n-4}\cdots\frac{5}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \leq \frac{2n+1}{2n}.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach oznacza to, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-1}{2n-2}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-3}{2n-4}\cdots\frac{5}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = 1,$$

co oznacza, po zmianie kolejności czynników w iloczynie, że

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}.$$

Jest to sygnalizowany na wstępie słynny wzór Wallisa, przedstawiający liczbę $\boldsymbol{\pi}$ w postaci iloczynu nieskończonego. Co za zaskakująca regularność!

2.5. Liczba π jako nieskończony ułamek łańcuchowy

Któż z nas nie słyszał o zasadzie podzielności. Przecież o tym była mowa już w szkole podstawowej. Przypomnijmy ją, aby łatwiej było kontynuować rozumowanie. W myśl tej zasady dla dowolnej liczby całkowitej *p* i naturalnej *q* istnieją liczby całkowite *w*, *r*, że

$$p = wq + r, \text{ gdzie } r \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}.$$

Co więcej, liczby w, r o podanych własnościach wyznaczone są jednoznacznie. Mówimy wtedy, że r jest *resztą* z dzielenia p przez q. Jeśli dodatkowo $r = 0$, oznacza to, że q dzieli p.

Zasada ta pozwala zapisać każdą liczbę wymierną w postaci pewnego szczególnego ułamka. Ale po kolei. Przede wszystkim zapiszmy zasadę podzielności w innej, równoważnej postaci

$$\frac{p}{q} = w + \frac{r}{q}.$$

Wtedy po lewej stronie tej równości mamy liczbę wymierną. Prawa strona mówi, że liczbę tę można jednoznacznie przedstawić w postaci frakcji całkowitoliczbowej i w ułamkowej $\frac{r}{q} \in [0, 1]$.

Weźmy ten ułamek, zakładając, że $r > 0$, i zapiszmy go w postaci

$$\frac{r}{q} = \frac{1}{\frac{q}{r}},$$

a następnie dla liczby $\frac{q}{r}$ ponownie zastosujmy zasadę podzielności

$$\frac{q}{r} = w_1 + \frac{r_1}{q},\ \ r_1 \in \{0, 1, \ldots, r-1\}.$$

Po podstawieniu do ułamka $\frac{r}{q}$ dostaniemy

$$\frac{r}{q} = \frac{1}{w_1 + \frac{r_1}{q}}.$$

Procedurę tę możemy powtarzać dopóty, dopóki w i-tym kroku $r_i > 0$, ale co najwyżej po r krokach, z powodu że ciąg powstałych reszt (r_i) jest malejącym ciągiem liczb całkowitych nieujemnych. W efekcie zastosowania tej procedury otrzymamy

$$\frac{p}{q} = w + \cfrac{1}{w_1 + \cfrac{1}{w_2 + \cfrac{1}{w_3 + \ldots \cfrac{1}{w_j}}}}.$$

Drugi składnik ostatniej sumy nazywamy *ułamkiem łańcuchowym*. Prześledźmy to jeszcze raz na przykładzie liczby $\frac{99}{17}$. Dostaniemy kolejno

$$\frac{99}{17} = 5 + \frac{14}{17} = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{17}{14}} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{14}} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{14}{3}}} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{2}{3}}} =$$

$$5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Czytelnik pewnie zastanawia się, czego oczekujemy od pojęcia ułamka łańcuchowego. Przecież posługiwanie się tym pojęciem jest kłopotliwe – zajmuje sporo czasu i miejsca na kartce papieru. Domyślamy się, że powód jest i jak najszybciej musimy o nim napisać. Przede wszystkim nie chodzi tutaj o liczby wymierne. Te prościej jest zapisać w układzie pozycyjnym, na przykład dziesiętnym. Skoro tak, to będziemy mówili o liczbach niewymiernych. Ale każdy ułamek łańcuchowy jest liczbą wymierną, więc coś jest nie tak. To też wyjaśnimy, tym razem zaczynając od przykładu, biorąc do tego $\sqrt{2}-1$.

Bezpośrednim rachunkiem możemy sprawdzić, że $\sqrt{2}-1$ jest pierwiastkiem równania

$$x^2+2x-1=0 \text{ dla } x>0.$$

Równanie to zapiszemy inaczej

$$x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x(x+2)-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{x+2}.$$

Z równania tego, w wyniku podstawiania w miejsce x po jego prawej stronie wyrażenia $\frac{1}{x+2}$, otrzymamy

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x+2}}.$$

Wygląda to znajomo, przecież to jest (algebraiczny) ułamek łańcuchowy. Oznaczmy prawą stronę powyższej równości przez. Jeśli powtórzymy tę procedurę dla równania $x = f_1(x)$, to dostaniemy

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}}.$$

Prawą stronę otrzymanego równania oznaczmy przez $f_2(x)$. Porównując dwa ostatnie równania, łatwo zauważyć, że ponieważ

$$f_2(x)=f_1\Big(\frac{1}{x+2}\Big),$$

drugie równanie ma postać

$$x=f_1\Big(\frac{1}{x+2}\Big).$$

Nietrudno sprawdzić, że jeśli procedurę tę przeprowadzimy *n* razy, a przez $f_n(x)$ oznaczymy prawą stronę otrzymanego równania

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots\cfrac{1}{2+x}}}},$$

to

$$x = f_n(x) \text{ dla } x > 0$$

oraz

$$f_{n+1}(x) = f_n\Big(\frac{1}{x+2}\Big).$$

Z konstrukcji kolejnych równań wynika, że każde z nich ma to samo rozwiązanie x_o w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, mianowicie $x_o = \sqrt{2}-1$. Z powyższego wynika, że dla x_o, ciąg $f_n(x_o)$ jest zbieżny do x_o. Symbolicznie ostatnie stwierdzenie możemy zapisać następująco

$$\sqrt{2} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}.$$

i nazywamy *ciągłym ułamkiem łańcuchowym*.

W takim razie liczbę niewymierną $\sqrt{2}$ możemy wyreprezentować jako

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}.$$

Teraz wszystko jest jasne. Ciągły ułamek łańcuchowy pozwalający wyreprezentować liczbę niewymierną $\sqrt{2}$ wykazuje zadziwiającą regularność, w przeciwieństwie do efektu zapisu dziesiętnego, który w ogóle – poprzez skrajną nieregularność – nie jest możliwy.

Ogólnie mówiąc, można udowodnić, że każdą liczbę niewymierną i tylko liczbę niewymierną można przedstawić w postaci ciągłego ułamka łańcuchowego (patrz np. [Rębowski 2009]). Mistrzem w reprezentowaniu liczb niewymiernych za pomocą ciągłych ułamków łańcuchowych był Euler.

W przypadku liczby π wykazał (szczegóły pominiemy), że

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}}}.$$

Jest to jednocześnie jeden z dowodów na to, że π jest liczbą niewymierną.

2.6. Liczba π a najpiękniejszy wzór matematyki

Zanim przedstawimy najpiękniejszy wzór matematyki, potrzebujemy jeszcze jednej ważnej liczby rzeczywistej. Liczba **π** związana jest z równie ważną liczbą, zwaną *liczbą Eulera*[10], którą symbolicznie oznaczamy literą **e**. Domyślamy się, na czym polega problem – jest ona liczbą niewymierną, co po raz pierwszy pokazał Euler[11].

Znanych jest kilka sposobów definiowania liczby **e**. Wspomnimy tutaj tylko o tych najbardziej znanych.

1. Liczbę **e** definiuje się[12] jako granicę ciągu rosnącego i ograniczonego z góry (a_n), gdzie

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Większość Czytelników tego tekstu zapewne w takich okolicznościach zapoznała się z tą liczbą.

2. O wiele mocniejszym wynikiem jest przedstawienie liczby **e** jako sumy następującego szeregu liczbowego[13]

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Argumentów na to jest wiele. Jednym z nich jest szybkość zbieżności tego szeregu do **e**, która jest nieporównanie większa, aniżeli ciągu (a_n). Kolejny, koronny, argument wykorzystuje ten szereg do zdefiniowania jednej z najważniejszych funkcji elementarnych – funkcji wykładniczej

$$\mathbf{R} \ni x \longrightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

3. Niech f oznacza funkcję rzeczywistą różną od stałej i różniczkowalną, dla której

$$f'(x) = f(x) \text{ dla wszystkich rzeczywistych } x.$$

Wtedy f musi być eksponentą.

4. Weźmy funkcję f daną wzorem

$$[1, \infty) \ni x \longrightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Wówczas jedynym rozwiązaniem równania $f(x) = 1$ jest liczba **e**.

---

[10] Czasami nazywana jest *liczbą Nepera*. J. Napier (Neper) (1550–1617), szkocki właściciel ziemski jest odkrywcą logarytmów naturalnych, które w podstawie miały liczbę **e**.

[11] Jest nawet przestępna, co wykazał Ch. Hermite (1822–1901). Z prac Hermite'a korzystał później Lindemann, dowodząc przestępności liczby **π**.

[12] Po raz pierwszy zrobił to J. Bernoulli (1667–1748).

[13] Wynik ten należy do Eulera. Od 1728 roku liczba ta oznaczana jest symbolem **e**.

Istnieje ścisły związek pomiędzy tymi dwiema ważnymi liczbami. Po raz pierwszy dostrzegł to A. de Moivre (1667–1754) pokazując, że wynik operacji $n!$ jest asymptotycznie równy $cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, dla pewnej stałej rzeczywistej c. Oznacza to, że

$$\frac{n!}{cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \longrightarrow 1.$$

Następnie J. Stirling (1692–1770) poprawił ten wynik, pokazując, że stała c we wzorze de Moivre'a jest równa $\sqrt{2\pi}$. Wynik ten przeszedł do historii jako tzw. *wzór Stirlinga* w postaci

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

albo równoważnie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1.$$

Stąd już mały krok do sygnalizowanej zależności pomiędzy liczbami **π** i **e**,

$$e = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Po tych dywagacjach na temat liczby Eulera możemy wrócić do wyjaśnienia, co rozumiemy przez najpiękniejszy wzór w matematyce. Związane to jest z kolejnym wielkim odkryciem, sformalizowanym przez Gaussa i W. R. Hamiltona (1805–1865), a dotyczącym ciała liczb zespolonych[14]. Jest rzeczą zdumiewającą, że Gaussowi brakło wyobraźni i poprzestał na algebraicznym opisie liczb zespolonych, nie zauważając potrzeby wykorzystania ich interpretacji geometrycznej, aczkolwiek w literaturze mówi się o *płaszczyźnie Gaussa*[15].

Spojrzenie na liczby zespolone z perspektywy geometrii spowodowało, że dotychczasowy kartezjański układ współrzędnych należało zastąpić układem polarnym, zwanym też biegunowym. W układzie takim każdą liczbę zespoloną z rozumianą jako punkt plaszczyzny zespolonej można jednoznacznie opisać parą liczb:

• ρ – jej odległością od ustalonego punktu, zwaną *modułem* $|z|$

• φ – jej azymutem liczonym względem ustalonej półprostej, zwanej *argumentem głównym arg z*.

Doprowadziło to do *postaci wykładniczej* liczby zespolonej, którą po raz pierwszy metodami czysto analitycznymi uzyskał Euler[16]

$$z = \rho e^{i\varphi} = \rho(cos(\varphi) + isin(\varphi)),$$

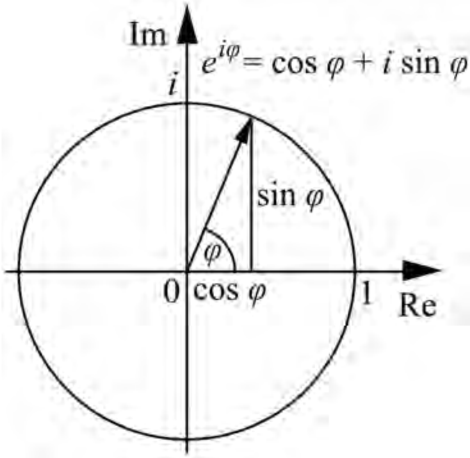
---

[14] Liczby zespolone odkrył o wiele wcześniej Girolamo Cardano (1501–1576), który nie wierząc w rzeczywiste istnienie odkrytych liczb, liczbie zespolonej i nadal nazwę *jednostki urojonej*.

[15] Zauważył to po raz pierwszy matematyk norwesko-duński J. H. Wessel (1745–1818).

[16] Euler również nigdy nie widział interpretacji geometrycznej przedstawionej na rys. 2. W serwisie YouTube (http://www.youtube.com/watch?v = zApx1UlkpNs & feature) na temat tego wzoru zamieszczono film pokazujący dowód wzoru Eulera.

gdzie *i* oznacza jednostkę urojoną wprowadzoną przez G. Cardano (patrz przyp. 11).



Rys. 2. Ilustracja geometryczna wzoru Eulera dla $\rho = 1$

Podstawmy we wzorze Eulera $\rho = 1$, $\varphi = \pi$. Dostaniemy wtedy

$$\mathbf{e^{i\pi} + 1 = 0}.$$

Oto najpiękniejszy wzór matematyki! Urzeka swoją prostotą i przejrzystością. Łączy on w sobie wysiłek intelektualny wielu pokoleń matematyków. Pokazuje siłę i skuteczność rozumowania opartego na starej regule arystotelowskiej posługującej się tylko *prawdą* i *fałszem*. Kojarzy teorię liczb z zaawansowanymi metodami teorii funkcji rzeczywistych, geometrię z abstrakcyjną strukturą ciała zespolonego. Znalazło się w nim miejsce na pięć najważniejszych liczb, bowiem:

- Liczby 0 i 1 stanowią fundament arytmetyki liczb wymiernych, jako *elementy neutralne* dwóch działań arytmetycznych: dodawania i mnożenia. Bez tych liczb nie byłoby liczb przeciwnych, a więc i ujemnych oraz odwrotnych, czyli ułamków.
- O roli liczby $\boldsymbol{\pi}$ wiemy już dostatecznie dużo i darujemy sobie dodatkowe komentarze.
- Znaczenie liczby Eulera jest przeogromne. Wspomnieliśmy o eksponencie, wzorze Stirlinga. Należy również wspomnieć np. o *logarytmie naturalnym* czy *rozkładzie normalnym* jako centralnym w teorii prawdopodobieństwa.
- Uzupełnienie zbioru $\{0, 1\}$ liczbą **i** pozwoliło wykonać, jak pokazał to Hamilton i Gauss, konstrukcję, która rozszerzyła ciało liczb rzeczywistych do ciała liczbowego, dla którego każde równanie algebraiczne nad tym ciałem ma co najmniej jeden pierwiastek[17].

[17] Jest to słynne *podstawowe twierdzenie algebry Gaussa*, które oznacza, że ciało liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte.

Na koniec powinniśmy wyraźnie podkreślić, że zbiór „ważnych" liczb w matematyce jest o wiele obszerniejszy. Należą do nich na pewno liczby: Fibonacciego, Fermata, Bernoulliego, Catalana, Mersenne'a, Stirlinga, stała Eulera i wiele innych (patrz np. [Rębowski 2009]).

Bibliografia

Aczel A.D., *Wielkie twierdzenie Fermata, rozwiązanie zagadki starego matematycznego problemu*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998.

Boyer C., *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, PWN, Warszawa 1964.

Cajori F., *A history of Mathematics*, MacMillan and CO, 1994.

Courant R., Robbins H., *Co to jest MATEMATYKA*, wyd. drugie, PWN, Warszawa 1962.

Downing D., *Dictionary of Mathematics terms*, third edition, Barrons's Educational Series, Inc. 1995.

Fichtenholz G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom II, wyd. drugie, PWN, Warszawa 1976.

Guedj D. , *Twierdzenie papugi*, Grupa Wydawnicza Bertelsmann Media, Warszawa 2001.

http://mathworld.wolfram.com, 28.09.2011.

Merzbach U.C., Boyer C.B., *A history of Mathematics*, third edition, John Wiley & Sons, Inc., 2010.

Rębowski R., *3,14 – czyli imieniny liczby π*, „Zeszyty Naukowe" PWSZ im. Witelona w Legnicy 2011, nr 7.

Rębowski R., *Matematyka dyskretna dla informatyków*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, Legnica 2009.

Sierpiński W., *Wstęp do teorii liczb*, PZWSz, Warszawa 1965.

Stein J.D., *Cosmic Numbers. The Numbers That Define Our UNIVERSE*, Basic Books, New York, 2011.

Tanton J., *Encyclopedia of Mathematics*, Facts On File, Inc. 2005.

Weisstein E.W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, second edition, van Nostrand Reinhold, New York 1989.

SUMMARY

On the number π equal to 3.141592653589793… from the perspective of probability theory and not only. Part one

The paper presents the achievements of several generation of mathematics who contributed by their researching to clarify the meaning and the role of the number π in mathematics. The first part of the paper focuses on methods used in the theory of real functions, geometry and number theory. In most situation, they tried to recreate the reasoning and techniques of accounting which led to such spectacular results as general Leibniz rule, Eulers formula or the relationship of the number π with Riemann zeta function. Other ways of representing number π was reminded in the example of Walls product and Eulers infinite continued fractions. Moreover, the place of number π was mentioned in the greatest formula of mathematics which is Eulers formula and its connection with another important number, Eulers number.

Key words: number π, power series, harmonic series, prime number, continued fraction.