Ryszard Rębowski

Uwagi o dylatacji czasu w warunkach szczególnej teorii względności

Zeszyty Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy 7, 7-19

2011

Zeszyty Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy
ISSN 1896-8333 nr 7/2011

Ryszard Rębowski
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy,
Wydział Zarządzania i Informatyki

Uwagi o dylatacji czasu w warunkach szczególnej teorii względności

STRESZCZENIE

Kluczem do zrozumienia szczególnej teorii względności Einsteina jest pojęcie czasu i problem możliwości jego synchronizacji. Wychodząc z dwóch postulatów STW, metodami elementarnymi przedstawiono sposób pomiaru czasu w warunkach STW, zarówno dla przypadku pojedynczego, jak i dwóch układów inercjalnych. Na tej podstawie wyprowadzono pojęcia czasu własnego i czasu obserwowanego zjawiska. Zsynchronizowanie zegarów rejestrujących czas własny i czas obserwowany umożliwia porównanie tych czasów, czego efektem jest zjawisko dylatacji czasu. Zwrócono uwagę na związki dylatacji czasu ze STW i jego interpretację w postaci dobrze znanego paradoksu bliźniąt.

Słowa kluczowe: dylatacja czasu, szczególna teoria względności, przekształcenie Lorentza, paradoks bliźniąt.

1. Wstęp

Termin *dylatacja czasu* na ogól kojarzy się ze szczególną teorią względności (STW) Einsteina, a jeszcze częściej z interpretacją zjawiska *dylatacji* nazywanego *paradoksem bliźniąt*. Mówiąc wprost – chodzi o czas i o jego znaczenie. Gdybyśmy fizykę umownie podzielili na tę „przed" i „po" Einsteinie, to „przed" z czasem nie było żadnego problemu – miał on znaczenie absolutne, czyli był wspólny dla wszystkich układów fizycznych. Seria odkryć fizyki dziewiętnastowiecznej, między innymi: teoria pola Maxwella, wyniki eksperymentów Michelsona-Morleya, transformacje Lorentza jako uogólnienie dobrze znanych transformacji Galileusza czy zasada względności Henri Poincare'go, zmusiła rodzącą się „nową" fizykę do zweryfikowania dotychczasowej roli czasu. Jak wiemy, zaszczyt ten przypadł młodemu urzędnikowi biura patentowego z Berna w Szwajcarii. Nastała era fizyki „po" Einsteinie, w której rola czasu przestała być szczególna.

Naszym zamiarem nie jest przedstawienie STW – w tym przypadku odsyłamy Czytelnika do bogatej literatury (np. [Einstein 1916, Einstein 1997, Infeld 1962, Schwartz i MaGuinness

1989]). Tym bardziej nie mamy intencji posługiwania się sformalizowanym językiem tej teorii. Interesuje nas natomiast aspekt fizyczny tej teorii związany ze zrozumieniem znaczenia czasu w jej ramach.

2. Pojęcie czasu

Czas będziemy rozumieli jako wynik pomiaru. Zaczniemy od opisania wzorcowego przyrządu pomiarowego. Weźmy odcinek długości l metrów. Przez *zegar o podstawie l* będziemy rozumieli układ dwóch równoległych luster oddalonych od siebie o l. Nazwiemy je odpowiednio lustrem dolnym i górnym. Lustro dolne zaopatrzone będzie w źródło światła. Przez *jednostkę czasu* $\triangle_l t$ takiego zegara będziemy rozumieli zjawisko polegające na tym, że światło wychodzące ze źródła pokona drogę do drugiego lustra i po odbiciu powróci do lustra dolnego (patrz rys. 1).

Ponieważ droga, jaką pokona światło, wynosi $2l$, to przy założeniu, że w rozważanym ośrodku porusza się z prędkością **c** (w m/s), możemy zapisać

$$\triangle_l t = \frac{2l}{\mathbf{c}}. \tag{1}$$

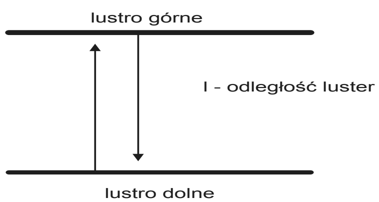
Wtedy każdą wielkość t postaci $t = r\triangle_l t$, gdzie r oznacza liczbę rzeczywistą nieujemną, będziemy nazywali *czasem własnym*.

Dla dalszych rozważań przyjmiemy dwa następujące postulaty STW:

1. Prawa fizyki są jednakowe we wszystkich układach inercjalnych.

2. Prędkość światła w próżni jest taka sama dla wszystkich układów inercjalnych we wszystkich kierunkach.

O zjawisku fizycznym powiemy, że jest ono mierzalne, jeśli dla każdego układu inercjalnego pozwala się ono opisać co najmniej w kategoriach *zaczęło się–skończyło się*. Atrybuty te pozwalają wtedy na określenie przedziału czasowego, którego pomiar zegarem pozwala na wyznaczenie czasu, który możemy nazwać *czasem życia* tego zjawiska. Pomiaru czasu zjawiska może dokonać tylko obserwator. Jeśli obserwator wraz z zegarem będzie przebywał w układzie inercjalnym mierzonego zjawiska, to tak wyznaczony czas zjawiska nazwiemy jego *czasem własnym*. Dalej zjawiska mierzalne będziemy nazywali krótko *zjawiskami*.



Rys. 1. Model zegara o podstawie l

3. Zjawisko i jego pomiar

Przyjmiemy, że wszystkie zjawiska, o których będzie mowa, będą zachodziły w przestrzeni rozumianej jako zbiór punktów opisanych czwórkami liczb (x, y, z, t), gdzie trzy pierwsze opisują położenie, czwarta służy do rejestracji czasu własnego. Z tego powodu przestrzeń tę nazywa się *czasoprzestrzenią*. Upraszając sytuację, będziemy mówili, że w punkcie (x, y, z) znajduje się zegar, którego wskazanie wynosi t. Założymy, że każdy taki zegar ma tę samą podstawę l. W takim razie dla czasu własnego nazwanego wcześniej „tyknięciem" takiego zegara mamy $\triangle_l t = \frac{2l}{\mathbf{c}}$. Tyknięcie to wyznacza przedział czasowy I_{AB} określony przez dwa zjawiska: A – impuls światła jest generowany przez źródło umiejscowione na dolnym lustrze, B – impuls światła wskutek odbicia od górnego lustra powrócił.

Wtedy

$$|I_{AB}|\triangle_l t,$$

gdzie $|I_{AB}|$ oznacza długość przedziału I_{AB}, wyznacza czas własny zjawiska równy $\frac{2l}{\mathbf{c}}$. Dlatego w naszym przypadku $|I_{AB}| = 1$. Z tego powodu o $\triangle_l t$ możemy myśleć jako o jednostce miary czasu. Ogólnie $|I_{AB}|$ jest liczbą rzeczywistą nieujemną, która wcześniej oznaczana była przez r. Zatem znajomość długości przedziału czasowego pozwala wyznaczyć czas własny zjawiska, co jest doskonale znane.

Dalej będziemy zakładali, że wraz z zegarem o lokalizacji w punkcie (x_o, y_o, z_o, t) związany jest co najmniej jeden *układ inercjalny* **U**. Z matematycznego punktu widzenia jest to pewien podzbiór punktów przestrzeni $(x, y, z, t) \in$ U, które charakteryzują się tym, że wektory prędkości punktów materialnych umieszczonych w (x, y, z) są jednakowe. Niech (x_1, y_1, z_1) opisuje lokalizację drugiego, innego punktu. Oczywiście z punktem tym związany jest jego zegar. Nie ma żadnego powodu, aby doszukiwać się jakiegokolwiek związku pomiędzy zachowaniem się obu tych zegarów. Jeśli jednak przyjmiemy, że oba rozważane punkty (czyli zegary) są elementami tego samego układu inercjalnego, to można dokonać procesu *synchronizacji* obu zegarów. W tym celu w środku odcinka o końcach (x_o, y_o, z_o) i (x_1, y_1, z_1) należy umieścić źródło światła, które wysyła impulsy świetlne jednocześnie w obu kierunkach wyznaczonych przez te punkty. Jeśli przed emisją oba zegary były w spoczynku i zostaną uruchomione wskutek odbioru impulsu, to powiemy, że zegary zostały *zsynchronizowane*. Mniej formalnie będziemy też mówili, że zegary pracują w tym samym rytmie, bowiem znajdując się w tym samym układzie, nie mogą się względem siebie przemieszać oraz zgodnie z drugą zasadą STW w każdym kierunku impuls światła porusza się z tą samą prędkością. Dalej przyjmiemy, że każde dwa zegary znajdujące się w układzie inercjalnym są zsynchroniowane.

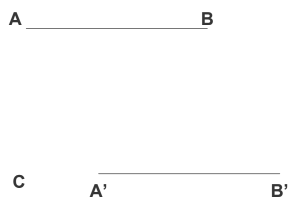
3.1. Przypadek pojedynczego układu

Weźmy dwa różne punkty przestrzeni (pamiętamy o synchronizacji zegarów) tego samego układu inercjalnego i załóżmy, że obserwator znajduje się w (x_1, y_1, z_1). W punkcie (x_o, y_o, z_o) umieścimy nasze zjawisko, które jest „tyknięciem” zegara. Niech przedział czasowy tego zjawiska nazywa się I_{AB}. Obserwacja tego zjawiska przez naszego obserwatora sprowadza się do wyznaczenia przedziału czasowego $I_{A'B'}$, gdzie jego początek A' jest efektem zaobserwowania zjawiska A, odpowiednio koniec B' zjawiska B. Wyjaśnienia wymaga zwrot *obserwacja*. Przede wszystkim do tego celu potrzebne jest medium. Wykorzystamy do tego celu ponownie impuls światła. W momencie pojawienia się A, impuls światła po przebyciu drogi łączącej punkty (x_o, y_o, z_o) i (x_1, y_1, z_1) wygeneruje A'. Podobnie B wygeneruje B'. Ponieważ oba punkty znajdują się w tym samym układzie inercjalnym, więc zgodnie z drugim postulatem STW

$$|I_{AB}| = |I_{A'B'}|,$$

co oznacza, że czas własny zjawiska jest identyczny z czasem jego obserwacji.

Omówioną wyżej sytuację przedstawiono na rys. 2, gdzie oś czasu zorientowana jest na prawo. Rysunek ten ilustruje „efekt przesunięcia” przedziału zjawiska powstały w wyniku jego obserwacji. Przedzial $I_{CA'}$ z rys. 2 reprezentuje to przesunięcie. Z punktu widzenia drugiej zasady STW efekt ten jest niezależny od umiejscowienia położenia obserwatora zjawiska.



Rys. 2. Efekt „przesunięcia” przedziału w układzie inercjalnym

3.2. Przypadek dwóch układów

Podstawowy problem związany z pomiarem zjawiska polega na tym, że obserwator takiego zjawiska nie musi być elementem układu inercjalnego związanego z tym zjawiskiem. Załóżmy, że zjawiskiem tym będzie również „tyknięcie” zegara o podstawie l. Wtedy, jak to stwierdziliśmy wcześniej, przedział czasowy I_{AB} (patrz rys. 3) związany z tym zjawiskiem wyznacza, jeśli obserwator znajduje się w układzie zegara, czas własny równy jednostce czasu $\triangle_l t$.

Załóżmy teraz, że obserwator nie znajduje się w układzie zdarzenia. Dokładniej, przyjmijmy, że układ inercjalny zjawiska porusza się (względem układu obserwatora) ruchem jednostajnym prostoliniowym równolegle do płaszczyzny luster z prędkością $0 < \mathbf{v} < \mathbf{c}$. Wtedy to, co zobaczy obserwator (zasada obserwacji przedstawiona została w podrozdziale 3.1), przedstawia rys. 3. Dokładniej, punkty A, B, C reprezentują, przy uwzględnieniu efektu ruchu układu zegara względem obserwatora, wynik obserwacji zachowania się zegara: impuls przed wysłaniem, impuls w momencie odbicia od górnego lustra, impuls po powrocie. Ze względu na drugą zasadę STW mamy symetrię, którą na rys. 3 przedstawia odcinek DC (trójkąty ΔADC i ΔBDC są przystające).

Zgodnie z drugim postulatem, na odcinku AC prędkość światła dalej będzie równa $\mathbf{c}$. Długość odcinka AB ze względu na ruch jednostajny prostoliniowy z prędkością $\mathbf{v}$ jest równa $\mathbf{v}t$, gdzie t oznacza czas zdarzenia zarejestrowany przez obserwatora. Dalej t nazwiemy *czasem obserwacji zjawiska*. Długość odcinka DC jest przyjętym parametrem zegara i wynosi l. Ze względu na symetrię długość odcinka AD jest połową długości odcinka AB. Pisząc twierdzenie Pitagorasa, dla trójkąta ACD dostaniemy

$$\left(\frac{\mathbf{v}t}{2}\right)^2 + l^2 = \left(\frac{\mathbf{c}t}{2}\right)^2,$$

gdzie, jak pamiętamy, $\frac{2l}{\mathbf{c}} = \triangle_l t$ jest czasem własnym obserwowanego zjawiska. Ponieważ wtedy $l = \frac{\mathbf{c}\triangle_l t}{2}$, więc ostatnia równość będzie miała postać

$$\frac{\mathbf{v}^2 t^2}{4} + \frac{\mathbf{c}^2(\triangle_l t)^2}{4} = \frac{\mathbf{c}^2 t^2}{4},$$

co daje

$$t^2(\mathbf{c}^2 - \mathbf{v}^2) = \mathbf{c}^2(\triangle_l t)^2.$$

Po podzieleniu stronami przez $\mathbf{c}^2$ i spierwiastkowaniu ($\mathbf{v} < \mathbf{c}$) otrzymamy

$$\triangle_l t = t\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}. \tag{2}$$

Wzór (2) tłumaczy związek, a jednocześnie różnicę pomiędzy dwoma pomiarami tego samego zjawiska jako efektu umieszczenia obserwatora w układzie poza poruszającym się układem inercjalnym obserwowanego zegara. Efektem tego pomiaru jest czas zaobserwowanego zjawiska t w odróżnieniu od czasu własnego $\triangle_l t$. Okoliczności towarzyszące obserwacji zjawiska zmuszają do posługiwania się dwiema skalami pomiaru takiego czasu. Rola wzoru (2) polega wtedy na „przetłumaczeniu" jednej skali na drugą, o czym napiszemy więcej dalej.

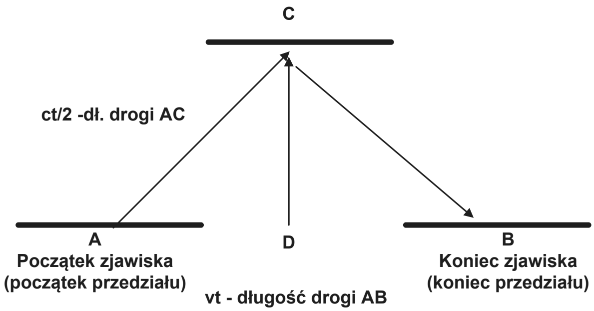
Uwaga. W literaturze przedmiotu wzór (2) zazwyczaj zapisuje się w postaci

$$t = \frac{\triangle_l t}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}}. \tag{3}$$

Wtedy czynnik

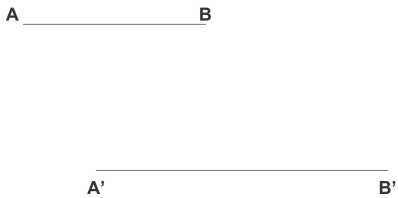
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}} \tag{4}$$

nazywany jest *współczynnikiem dylatacji*.



Rys. 3. Efekt obserwacji „tyknięcia zegara”

Efekt dylatacji można zilustrować graficznie, modyfikując sytuację przedstawioną na rys. 2, co pokazano na rys. 4, który ilustruje (poza efektem „przesunięcia”) efekt „rozciągnięcia”przedziału czasowego I_{AB} wskutek obserwacji zjawiska „tyknięcia zegara”do przedziału $I_{A'B'}$. Na uwagę zasługuje fakt, że wartość dylatacji nie zależy od położenia zegara względem obserwatora. Zależy natomiast tylko od wartości prędkości poruszającego się układu zegara.



Rys. 4. Efekt dylatacji przedziału czasowego

4. Interpretacja zjawiska dylatacji

Korzystając z postulatów STW pokazaliśmy, w jaki sposób można przeskalować czas własny (zaobserwowany) na czas zaobserwowany (własny) zjawiska.

W szczególności z równości (2) wynika, że

$$\triangle_l t < t, \tag{5}$$

co oznacza, że **czas obserwacji** „tyknięcia” zegara poruszającego się ruchem jednostajnym prostoliniowym **jest dłuższy aniżeli czas własny** tego zjawiska.

Zauważmy, że wartość czasu zaobserwowanego „tyknięcia" nigdy nie może być równa czasowi własnemu „tyknięcia" dla każdej podstawy l zegara, chyba że $\mathbf{v} = 0$. Istotnie, gdyby $t = \frac{2l}{\mathbf{c}}$ dla pewnej wartości l, to wtedy (patrz rys. 3) mielibyśmy

$$\left(\frac{\mathbf{c}t}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{v}t}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{c}t}{2}\right)^2,$$

co oznacza, że $\mathbf{v} = 0$. Oznacza to, że różnica pomiędzy czasami t i $\triangle_l t$ **nie jest spowodowana** zmianą zachowania się zegara poruszającego się polegającą na tym, że **spowalnia on**, czyli czas własny jego „tyknięcia" wydłuża się. Jest natomiast tylko konsekwencją przyjętej metodologii pomiaru zjawiska opartego na postulatach STW. Dokładniej, różnica ta **jest i tylko jest efektem pojawienia się obserwatora zjawiska**. Bez względu na to, czy ten obserwator jest, czy go nie ma, czas własny „tykania" zegara poruszającego się jest niezmienny – wynosi $\triangle_l t = \frac{2l}{\mathbf{c}}$. W rozdziale poświęconym tzw. *paradoksowi bliźniąt* wrócimy do tej kwestii.

Uwaga. Efekt przeskalowania opisany zasadą dylatacji czasu już wcześniej był dobrze znany. W matematyce pojawia się np. w twierdzeniu o zamianie zmiennych w całce Riemanna. Przypomnimy szybko to twierdzenie. Przypuśćmy, że dany jest odcinek $[a, b]$, którego elementy będziemy oznaczali symbolem x, oraz drugi odcinek $[\alpha, \beta]$ z elementami s. Niech $[\alpha, \beta] \ni s \to \psi(s) = x \in [a, b]$ oznacza funkcję, która przekształca odcinek $[\alpha, \beta]$ na odcinek $[a, b]$ (funkcja ψ wcale nie musi być funkcją liniową!). Jeśli dodatkowo funkcja ψ przeprowadza końce odcinka na końce, czyli: $\psi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$ oraz jest dostatecznie regularna, tzn. jej pochodna jest ciągła na $[\alpha, \beta]$, to dla $x = \psi(s)$, $s \in [\alpha, \beta]$

$$dx = \psi'(s)ds \text{ oraz } \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[\alpha,\beta]} f(\psi(s))\psi'(s)ds$$

dla każdej funkcji ciągłej f. Oczywiście nas interesuje przypadek, kiedy funkcja ta stale przyjmuje wartość jeden. Zauważmy, że wynik całkowania po przedziale $[a, b]$ (lewa strona powyższego wzoru), jak i wynik całkowania po przedziale $[\alpha, \beta]$ (prawa strona) dają długości przedziału $[a, b]$, gdzie $f = 1$. Z drugiej strony „zaobserwowana jego długość", czyli długość przedziału $[\alpha, \beta]$ wcale nie musi być równa $b - a$.

Jeśli teraz wrócimy do zagadnienia dylatacji, to zauważmy, że czas własny ($\triangle_l t$) to zmienna x, czas zaobserwowany (t), który jest miarą długości przedziału i dlatego możemy go oznaczyć przez t (nie należy mylić z $\triangle_l t$!) – to s. Wtedy wzór (2) możemy zapisać następująco

$$\triangle_l t = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}} \cdot \triangle t,$$

gdzie $\psi(t) = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}} \cdot t$ (bo v jest stałe!). Jeśli przypomnimy sobie teraz, że przyrost zmiennej niezależnej (argumentu funkcji) jest jej różniczką, to zasada dylatacji mówi, że w wyniku obserwacji zdarzenia znajdującego się w układzie inercjalnym poruszającym się ruchem jednostajnym prostoliniowym (a więc ze stałą prędkością), pojawiające się przedziały czasowe I oraz I' w procesie mierzalności tego zdarzenia są takie, że

$$\int_{I'} \triangle_l t = \int_I \psi'(t)dt = \int_I \sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}dt.$$

Jeśli natomiast **v** jest bardzo małe w stosunku do **c**, czyli $\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}} \simeq 0$, to z (2) wynika, że $t \simeq \triangle_l t$. Jest zatem tak jak w fizyce przed Einsteinem.

Z drugiej strony, im większa jest prędkość układu z zegarem, tym czas obserwacji „tykania" zegara jest większy, bowiem wtedy wartość współczynnika dylatacji γ rośnie oraz $t = \gamma\triangle_l t$. W sytuacji granicznej, kiedy **v** zbliża się do wartości **c**, obserwujemy efekt *pozornego zatrzymania się* zegara, bowiem czas obserwacji jest dowolnie duży (mówimy wtedy, że jest nieskończony).

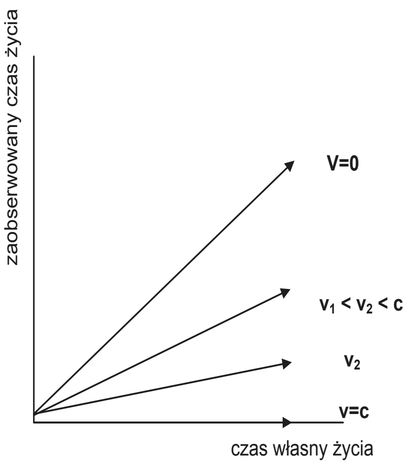
Wykorzystując zależność (2) dla czasu jednostkowego, łatwo jest przetłumaczyć efekt zmiany skali pomiaru jednostki czasu dla czasu życia zjawiska. W tym celu wystarczy (2) pomnożyć stronami przez dodatnią liczbę rzeczywistą r. Dostaniemy wtedy

$$r\triangle_l t = \frac{t_r}{\gamma}, \tag{6}$$

gdzie $t_r = rt$ oznacza *zaobserwowany czas życia zjawiska*.

W takim razie z**aobserwowany czas życia** zjawiska jest zawsze **dłuższy** aniżeli **czas własny życia zjawiska**, o ile układ inercjalny, w którym zjawisko to obserwowano porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Ostatnie wyniki można zilustrować wykresem, co przedstawia rys. 5.



Rys. 5. Efekt zmiany skali dla zjawiska dylatacji

Różnicę względną

$$d = \frac{t - \triangle_l t}{\triangle_l t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}} - 1 \tag{7}$$

będziemy nazywali miarą względną dylatacji. W poniższej tabeli przedstawiliśmy symulację zmiany wartości współczynnika dylatacji i jego miary.

Tablica 1 Symulacja wartości współczynnika dylatacji i jego miary

ułamek wartości **c**	wartość γ	wartość w % d
0	1	0
0,1	1,00005	0,005
0,5	1,15	15
0,9	2,29	129
0,9998	158,11	15711
1,00	∞	∞

5. Dylatacja a STW

Przedstawione rozważania, w szczególności wzór (2), są bezpośrednią konsekwencją postulatów STW, a nie samej teorii. Składową STW jest transformacja, której rola sprowadza się do odpowiedzi na następujące pytanie: *w jaki sposób zaobserwowaną rzeczywistość przekształcić na istniejącą rzeczywistość?*

Z formalnego punktu widzenia (czyli matematycznego) każdy układ inercjalny **U** rozumie się jako kartezjański układ współrzędnych (x, y, z, t), gdzie pierwsze trzy liczby opisują położenie, czwarty czas. Dalej będziemy pisali $\mathbf{U}_{(x,y,z,t)}$. Zagadnienie, które dyskutowaliśmy, wymaga dwóch takich układów: $\mathbf{U}_{(x,y,z,t)}$ i $\mathbf{U}'_{(x',y',z',t')}$. Zgodnie z pierwszym postulatem STW możemy założyć, że tak zdefiniowane układy (tak naprawdę zostały one opisane) są względem siebie równolegle (odpowiednie osie tych układów są równoległe i mają jednakowe zwroty). Dokonamy też pewnego uproszczenia polegającego na tym, że mówiąc, iż układ $\mathbf{U}'_{(x',y',z',t')}$ porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością **v** względem układu $\mathbf{U}_{(x,y,z,t)}$, porusza się wzdłuż prostej równoległej do osi x. Aby uniknąć nieporozumień, przyjmiemy, że położenie w każdym z układów będziemy oznaczali dużymi literami. W takim razie czwórka liczb (X, Y, Z, T) będzie opisywała położenie w układzie $\mathbf{U}'_{(x',y',z',t')}$ natomiast (X', Y', Z', T') odpowiednio w układzie $\mathbf{U}'_{(x',y',z',t')}$.

Jak dobrze wiadomo, z punktu widzenia STW w miejsce klasycznego *przekształcenia Galileusza* obowiązuje wtedy jej postać uogólniona – *przekształcenie Lorentza*, które przy poczynionych założeniach wygląda następująco:

$$(X, Y, Z, T) \to (X', Y', Z', T'),$$

gdzie przy obowiązujących uproszczeniach

$$Y' = Y,\ Z' = Z,$$

natomiast

$$X' = \gamma(X - \mathbf{v}T),\quad T' = \gamma\Big(T - \frac{\mathbf{v}X}{\mathbf{c}^2}\Big),$$

gdzie stała γ – współczynnik dylatacji (patrz też wzór (4)) przyjmuje wartość

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}},$$

Wtedy po chwili T (zaobserwowanej w układzie **U**) takiej, że $X = \mathbf{v}T$, z powyższej zależności dostaniemy

$$T' = \frac{T - \frac{\mathbf{v}^2 T}{\mathbf{c}^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}} = T\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}.$$

Jasne jest, że wzór ten opisuje zjawisko dylatacji czasu jak w (2).

6. Dylatacja czasu a paradoks bliźniąt

Zgodnie z STW obserwator również posiada swój zegar. Zauważmy, że dla potrzeb rozważań przeprowadzonych w rozdziale 3 i 4 z tego faktu nie korzystaliśmy. Zrobimy to teraz. A zatem mamy dwa układy inercjalne **U** i **U**', gdzie obserwator znajduje się w układzie **U**. Niech układ **U**' porusza się względem układu **U** ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością **v**. Oznaczmy przez t' czas własny życia zjawiska w układzie **U**', przez t zaobserwowany przez obserwatora czas życia tego zjawiska . Wtedy pomiędzy wartościami t oraz t' wystąpi efekt dylatacji (patrz (6) oraz rozdział 4), czyli

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}. \tag{8}$$

Jeśli założymy, że na początku rozważanego przedziału czasu **zegary zostały zsynchronizowane** (można to było zrobić, bowiem znajdowały się w tym samym układzie inercjalnym), to t' – wartość zaobserwowana przez obserwatora czasu własnego zdarzenia w układzie **U**' będzie **pokrywała się** ze wskazaniem zegara obserwatora w układzie **U**. Pamiętamy (patrz rozdział 3 i 4), że efekt omawianej tutaj dylatacji jest konsekwencją tylko:

• obu postulatów STW,

przy założeniu

• jednostajnego prostoliniowego ruchu jednego układu inercjalnego względem drugiego.

W takim razie zjawisko, które jest przedmiotem naszej dyskusji – ma **charakter symetryczny**. Po przeniesieniu obserwatora do układu **U**', obserwator ten stwierdzi, że to układ **U** porusza się (względem układu **U**'). Ze wzoru (8) wynika, że dla czasów t, t' mamy relację $t' < t$. Ponieważ czas obserwacji jest jednocześnie czasem własnym obserwatora, nierówność tę możemy zinterpretować następująco:

czas życia zjawiska obserwowanego jest nie dłuższy
aniżeli czas jego obserwacji.

Ale ruch obu układów jest względny, więc wprowadzając **drugiego obserwatora** i zakładając, że w czasie kiedy on jest obserwowany, czyni to samo w stosunku do drugiego, z punktu widzenia obu obserwatorów powstaną sprzeczne informacje. Jak dobrze wiadomo, w literaturze taką sytuację nazywamy *paradoksem bliźniąt*. Ale czy na pewno?

Zjawisko dylatacji czasu ma naturę relacji *dwuargumentowej* symetrycznej. Zdefiniujemy tę relację. Oznaczmy przez $\mathcal{U}$ rodzinę wszystkich układów inercjalnych. Weźmy dwa elementy tej rodziny, czyli dwa układy inercjalne $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \in \mathcal{U}$. Powiemy, że układ $\mathbf{U}_1$ jest w relacji $\mathcal{R}$ z układem $\mathbf{U}_2$, jeśli ma miejsce jednostajny i prostoliniowy z prędkością $|\mathbf{v}|$ (jako wartość skalarna) ruch względny układu $\mathbf{U}_2$ względem $\mathbf{U}_1$ (wtedy będziemy mówili, że obserwator znajduje się w układzie $\mathbf{U}_1$). Dalej będziemy pisali $\mathbf{U}_1 \mathcal{R} \mathbf{U}_2$. Zauważmy, że z zasady symetrii ruchu względnego wynika, iż

$$\mathbf{U}_1 \mathcal{R} \mathbf{U}_2 \Rightarrow \mathbf{U}_2 \mathcal{R} \mathbf{U}_1,$$

co oznacza, że relacja $\mathcal{R}$ jest **symetryczna**.

Jak wiemy, $\mathbf{U}_1 \mathcal{R} \mathbf{U}_2$ oznacza, że dla czasów życia zdarzenia t_2 i czasu życia obserwacji tego zdarzenia t_1 zachodzi zasada dylatacji. Własność symetryczności relacji nie jest żadną własnością sprzeczną, wręcz przeciwnie, w wielu sytuacjach jest ona pożądana. Tłumaczy na przykład, dlaczego nie można zsynchronizować ze sobą **dwóch zegarów** znajdujących się w różnych układach inercjalnych $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$. Efekt postrzegania przez obserwatora opóźnienia czasu własnego zjawiska jest tym powodem. Oznacza to, że jeśli dwa zegary znajdują się w tym samym układzie inercjalnym ($\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$) i zostały zsynchronizowane, to pozostają zsynchronizowane dopóty, dopóki względem siebie będą spoczywały ($\mathbf{v} = 0$). Ruch jednostajny prostoliniowy z prędkością $0 < |\mathbf{v}| < \mathbf{c}$ jednego z nich, powiedzmy $\mathbf{U}_2$, powoduje, że ich opis z punktu widzenia STW musi uwzględnić fakt, że zegary te **reprezentują różne** układy inercjalne. Konsekwencją takiego stanu jest zjawisko dylatacji czasu życia zjawiska w układzie poruszającym się, czyli różnica względna (7). W zaistniałej sytuacji, jeśli chcemy określić czas t rejestrowany w układzie $\mathbf{U}_1$ zajścia zjawiska w układzie poruszającym się $\mathbf{U}_2$ (z punktu widzenia układu obserwatora), to możemy to zrobić tylko w **jeden** sposób – poprzez zastosowanie przekształcenia (3). W takim razie musimy przyjąć, że dla danej wartości t (zarejestrowanej w układzie $\mathbf{U}_2$), wartość $\frac{t'}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{c}^2}}}$ jest wartością wskazania zegara obserwatora, czyli *t*. Możemy powiedzieć, że dokonaliśmy w ten sposób połowicznej synchronizacji obu zegarów. Ponieważ w omawianej sytuacji mamy do czynienia z symetrią, dokończenie synchronizacji nie może udać się. Skoro przed pojawieniem się ruchu względnego tych układów zegary były zsynchronizowane, oznacza to, że w wyniku ruchu **utraciły** tę własność. Co więcej, utraciły ją w sposób **nieodwracalny**. Jeśli kiedyś ponownie $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$, to będą wymagaly **ponownej synchronizacji**, czyli czasy dla obu zegarów będą musiały być liczone **od początku**.

Dlaczego zatem *paradoks bliźniąt* budzi takie emocje? Odpowiedź z punktu widzenia powyższych uwag jest tylko jedna – problem został źle sformułowany. W paradoksie, o czym pisaliśmy wyżej, pojawia się drugi obserwator. **Problem nie istnieje, dopóki każdy z nich osobno** interpretuje relatywistyczny efekt pomiaru czasu obserwacji zdarzenia, czyli dylatację. Wtedy działa jeszcze efekt *połowicznej* synchronizacji. Jeśli próbują to robić obaj jednocześnie, a o to właśnie w tym paradoksie chodzi, to ich informacje dotyczące dylatacji czasu **muszą zostać wzajemnie wymienione**, a na ten temat nic nie wspomina się, bowiem z powodu braku synchronizacji zegarów jest to niemożliwe. Wyjściem z sytuacji może być **trzeci obserwator**, który wystąpiłby w roli „arbitra” stwierdzającego owe rozbieżności w rejestracji czasów. Tego jednak efekt dylatacji czasu nie uwzględnia, bowiem nie można zsynchronizować ze sobą trzech zegarów znajdujących się w dwóch różnych układach inercjalnych. W takim razie *paradoks bliźniąt*, jako zagadnienie spoza STW, nie może być rozstrzygany na gruncie tej teorii.

7. Zakończenie

O wiele ciekawszym przypadkiem jest wersja *paradoksu bliźniąt*, która łamiąc symetrię pomiędzy układami (w takim razie jeden z nich nie może być układem inercjalnym), zakłada, że bliźniaczy zegar wprawiony w ruch powróci. Jak dobrze wiadomo, obiegowa opinia na temat takiej sytuacji mówi, że wskazania na obu zegarach będą różne – zegar po powrocie będzie wskazywał opóźnienie w stosunku do tego, który spoczywał. Dokładniej, opóźnienie to będzie wielkością dylatacji czasu (patrz tabela symulacji dylatacji czasu). Czy tak jest, nikt na razie tego jednoznacznie nie jest w stanie stwierdzić, aczkolwiek od wielu lat uporczywie przeprowadzane są eksperymenty próbujące to potwierdzić. W tym przypadku ewidentnie nie mamy do czynienia z efektem relatywistycznym STW, która opisuje zjawiska zachodzące tylko w układach inercjalnych. Trzeba zatem sięgnąć do jej uogólnienia – ogólnej teorii względności. To z kolei wykracza poza skromne ramy tego artykułu.

Bibliografia

Einstein A., *Relativity: The Special and General theory*, Mathuen & Co Ltd, 1916.

Einstein A., *Istota teorii względności*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.

Infeld L., *Ewolucja fizyki, rozwój poglądów od najdawniejszych pojęć do teorii względności i kwantów*, PWN, Warszawa 1962.

Schwartz J., McGuinness M., *Einstein dla początkujących*, Wydawnictwo „Alfa", Warszawa 1989.

SUMMARY

Remarks on the time dilation in the conditions of special theory of relativity

The key to understand Einsteins Special Theory of Relativity is the time and the possibility of synchronization problem . Proceeding from two postulates of SRT, elementary methods present the way to measure time in terms SRT for both, single and two inertial systems. On this basis, there are derived the own time concept and the time of observed phenomena. Synchronized clocks recording the own time and observed time allows the comparison these times that results in the phenomena of time dilation. There is draw attention to the relationships of time dilation with SRT and its interpretation of well known twin paradox.

Key words: time dilatation, special theory of relativity, Lorentz transformation, twin paradox.