Tomasz Stechnij

O paradoksie Josepha Bertranda

Zeszyty Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy 7, 85-93

2011

Zeszyty Naukowe Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy
ISSN 1896-8333 nr 7/2011

Tomasz Stechnij
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy,
Wydział Zarządzania i Informatyki

O paradoksie Josepha Bertranda

Artykuł popularnonaukowy

STRESZCZENIE

Publikacja dotyczy niezbyt znanego „paradoksu", opisanego przez Josepha Bertranda – matematyka francuskiego. Tematyka artykułu oscyluje wokół probabilistyki. Jest to dział matematyki nieczęsto lubiany przez studentów, a przecież bliski naturze naszego świata – bardziej niż choćby geometria analityczna. Popularnonaukowy charakter artykułu pozbawiony jest gruntownych formalizmów i skoncentrowany na „sensie tego wszystkiego". W ramach rozpatrywania zagadnienia ukazano wiele pytań związanych z teorią poznania, a także z miejscem matematyki jako ludzkiego instrumentarium w naukowym myśleniu o Kosmosie.

Słowa kluczowe: popularnonaukowy, losowość, prawdopodobieństwo geometryczne, filozofia przyrody, paradoks matematyczny

1. Prawdopodobieństwo geometryczne

Prawdopodobieństwo czegoś, losowość, zmienność nieprzewidywalna to cechy zjawisk, które każdy człowiek raczej potrafi intuicyjne zdefiniować, choćby enumeratywnie[1] mówiąc: los, ruletka!

Intuicyjne rozumienie prawdopodobieństwa towarzyszy nam od starożytności. Jednak – jak to w epistemologii[2] – różnie bywa, często poznanie intuicyjne, niepogłębione bywa zwodnicze – czasami zaś nie. Ale kiedy nie, a kiedy tak, nie wiadomo, trzeba to zbadać.

Pojęcie i pewien problem prawdopodobieństwa geometrycznego, o którym będzie tutaj mowa, też wydaje się być intuicyjny. Prawie każdy (w wieku większym lub równym wiekowi autora) grywał w „pchełki" (najlepsze były krążki wycięte z grubego papieru ściernego), czy „klasy" (malowane kredą na szkolnym chodniku) – nic prostszego, gry te „rządzą się" prawdopodobieństwem geometrycznym, które to pojęcie, powoli będzie stawać się coraz jaśniejszym. Podobnie na strzelnicy, gdy w wirującą tarczę próbujemy trafić lotką z kolorowym pędzelkiem, wygrywamy bombonierkę, bibułkowy kwiatek albo nic. Oczywiście we wspominanych grach mamy determinizm dzielnego człowieka, chcącego trafić w takie czy

---

[1] Z łaciny: kolejne wymienianie, definiowanie przez wyliczanie przykładów.
[2] Epistemologia to dział filozofii zajmujący się kryteriami i granicami ludzkiego poznania.

inne pole, ale pola są różnych rozmiarów, cel ruchomy, co dodaje losowości – nieprzewidywalności, bo gdyby było inaczej, nie byłoby gry i Wszechświat zrobiłby się nudnawy.

Po krótkiej kosmologicznej refleksji wróćmy do geometrii.

Zadajmy sobie trud wyobrażenia jakiejś powierzchni, np. koła (tarczy na strzelnicy). Mamy więc pewną część płaszczyzny wyznaczoną okręgiem o promieniu R. Pomyślmy, ile jest sposobów trafienia w taką tarczę lotką z wiatrówki? Uwaga, przez dalszą część tekstu rozumować będą dwie, nieco różne mentalności: Matematyk i Fizyk. Matematyk powie: punktów koła jest nieskończenie wiele, traktując trafienie jako wybranie dowolnego punktu z zadanego obszaru, istnieje nieskończenie wiele sposobów trafienia tarczy.

Fizyk powie: średnica wbijanego ostrza nie jest nieskończenie mała, a tym bardziej zerowa, i wynosi φ (np. 1 mm), a ponadto i przede wszystkim zarówno średnica, jak i współrzędne położenia lotki są skwantowane! Nasze pociski układają się skokowo, jak ponumerowane tekturowe krążki umieszczane wewnątrz okrągłej ramki z dnem zaopatrzonym w przegrody. Jest to m.in. klasyczne zagadnienie logistyczne: jak umieścić n jednakowych puszek w jednowarstwowej skrzynce, tak aby zmieścić ich jak najwięcej. Sposobów wygenerowania tak zdefiniowanych matryc (tzw. parkietaży) jest skończenie wiele.

Fizyk, nieco lekkomyślnie, może jeszcze dywagować: skoro długość jest skwantowana, to okręgi nie istnieją, istnieją co najwyżej n-kąty („n-kwanty”) foremne, co jeszcze bardziej upraszcza możliwe kombinacje układania puszek w okrągłej skrzynce. Bok każdego wielokąta ma 1 kwant długości, tarcza ma m kątów, a pocisk n, $m \gg n$ i tyle. Można to przecież obliczyć i narysować. Warto, np. w środowisku AutoCAD, narysować wielokąt foremny o 360 kątach i promieniu okręgu opisanego 1000, następnie skalując go, zastanowić się, czym różni się od okręgu o promieniu 1000.

Fizyk zada matematykowi także pytanie: w takim razie ile jest sposobów trafienia w okrąg tego koła („brzeg” naszej tarczy)? Oczywiście matematyk odpowie, że nieskończenie wiele, na co fizyk się uśmiechnie, a zawodowy strzelec roześmieje. Mamy tylko i aż matematykę – a „tutaj” nie zawsze część jest mniejsza od całości.

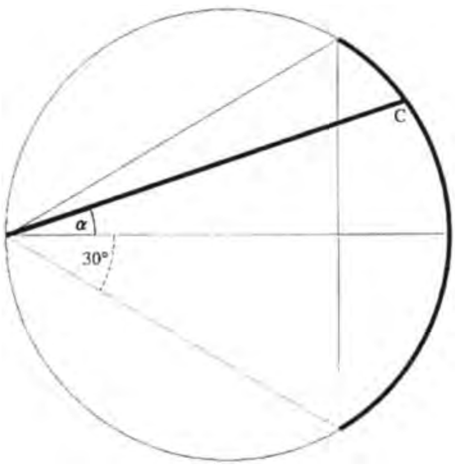
A teraz sformułujmy zadanie matematyczne:

Niech $|\Omega|$ oznacza pole powierzchni koła, podzielmy je na części wpisanym weń trójkątem foremnym. $|A|$ to pole powierzchni trójkąta. Ile wynosi prawdopodobieństwo trafienia na „chybił trafił” w trójkąt? Oczywiście $|A| : |\Omega|$. Powiedzmy, że na strzelnicy obszar trójkąta byłby premiowany czerwonym tekturowym kwiatkiem. Prawdopodobieństwo trafienia pozostałych obszarów tarczy wynosi: $(|\Omega| - |A|) : |\Omega|$. Wczuwając się w rolę właściciela strzelnicy – proszę uprzejmie... – ponownie tekturowy kwiatek, tym razem niebieski. Jak widać, pojęcie prawdopodobieństwa takiego zdarzenia nie powinno nastręczać trudności, jest ono intuicyjne i łatwo zrozumiałe. Ale...

Wydaje się, że sytuacja, w której rozkład jest dwupunktowy, czyli zdarzenia są dwa: kwiatek czerwony albo niebieski (o różnych prawdopodobieństwach zajścia) są wynikowo zredukowane do typowego rzutu monetą asymetryczną (np. orzeł z ołowiu, reszka z miedzi) – pozornie. Istota zjawiska jest inna, nasza przestrzeń zdarzeń (Ω) to zbiór nieskończony, a klasyczna przestrzeń probabilistyczna monety jest skończona – orzeł, reszka. Definiując zdarzenie poprzez podział koła na wyróżnione obszary, dokonaliśmy redukcji zjawiska do wyboru dwupunktowego (zakładając oczywiście, że zawsze trafimy w tarczę) – czerwony albo niebieski kwiatek. Sposobów wygrania kwiatków jest nieskończenie wiele, bo na nieskończenie wiele sposobów mogę trafić w trójkąt albo w któryś z trzech odcinków koła. Cele dwa. Trajektorii lotu pocisku nieskończenie wiele?

2. Zadanie nr 1 i 2 i 3

Mamy okrąg o promieniu 1, w okrąg (podobnie jak poprzednio) wpisaliśmy trójkąt równoboczny. Rzucamy na nasz układ figur cięciwę C (np. bierkę losowo spuszczaną na kartkę z narysowanymi figurami). Jaka jest szansa, że cięciwa będzie dłuższa, niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg? Rozwiążemy to zadanie kilkoma „sposobami".



Ryc. 1. Ilustracja zadania nr 1

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Grużewski 1966].

I. Za zdarzenie elementarne przyjmujemy wybranie kąta α, tworzonego między zaczepioną w wierzchołku trójkąta cięciwą a średnicą położoną na dwusiecznej kąta α. Obracając teraz cięciwą, próbkujemy wszystkie jej możliwe położenia i długości. Półprosta, na której konstruujemy cięciwę może zakreślić kąt π (180°), od kąta prostego do „minus prostego". A zatem przestrzeń zdarzeń jest przedziałem $\Omega = [-\pi/2, \pi/2]$. Kiedy C będzie dłuższa od boku trójkąta? Rozwiązanie jest oczywiste i widać je na rysunku. Granicznym kątem jest $\pi/6$ (30°), wówczas to cięciwa pokrywa się z bokiem trójkąta, przy kącie > 30° albo, licząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara, przy kącie < −30° cięciwa będzie dłuższa od boku. A, zatem $A = [-\pi/2, \pi/2]$, czyli 60°. Obliczmy prawdopodobieństwo:

$$P = |A| : |\Omega| = 60° : 180° = 1/3.$$

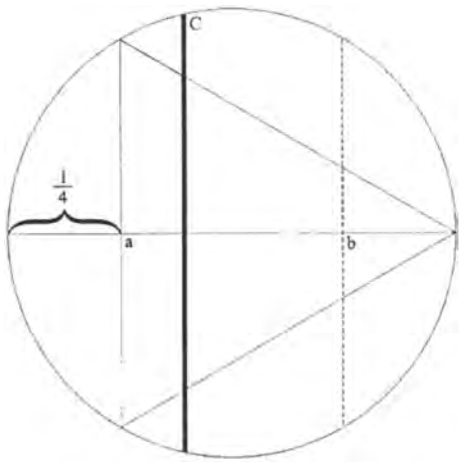
Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że losowo zadana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg wynosi 1/3.

Zadanie można by na tym zakończyć, wydaje się ono prostą (i już rozwiązaną) geometryczną łamigłówką. A jednak...

I'. Zastosujmy inne rozumowanie. Zapomnijmy chwilowo o rozumowaniu opartym na kątach. Jeśli wybierzemy losowo dwa punkty na okręgu i połączymy je cięciwą, to jak wybrać te punkty, aby spełnić warunek zadania ($C > a$)? Pierwszy punkt zadajmy dowolnie (np. wierzchołek trójkąta), pokonując po okręgu drogę równą 1/3 długości okręgu lokalizujemy drugi punkt – „naprzeciwko" pierwszego. Okrąg podzieliliśmy na 3 części o długościach po $1/3 \cdot 2\pi R$. Łatwo zauważyć, że zdarzenie polegające na losowej lokalizacji drugiego punktu tak, aby powstała cięciwa była dłuższa od boku trójkąta, ma prawdopodobieństwo 1/3. Wynik ten sam, ale droga do wyniku inna.

II. A teraz jeszcze inaczej. Za zdarzenie elementarne przyjmujemy odległość środka skonstruowanej cięciwy od środka okręgu. Wówczas $\Omega = [0, 1]$, gdyż pamiętamy, że promień wynosi 1. Nasza cięciwa przesuwa się od „środka do brzegu". Kiedy będzie dłuższa od boku trójkąta? Rzeczą oczywistą jest, że pomiędzy punktami a i b. Ponieważ$|ab| = R$, oraz zbiór punktów sprzyjających zdarzeniu $A = [0, 1/2]$, zatem

$$P = R/2 \cdot R = 1/2.$$

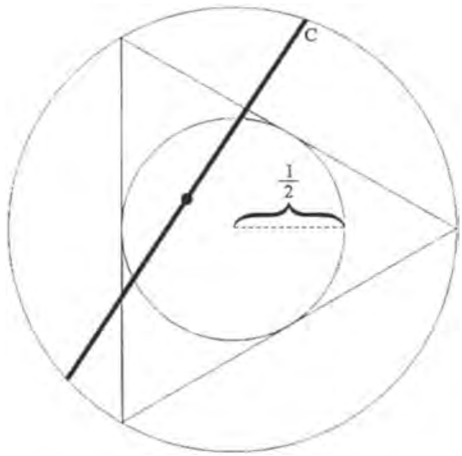


Ryc. 2. Ilustracja zadania II

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Grużewski 1966]

Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że losowo zadana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg, wynosi 1/2.

Zaczyna być ciekawie, wynik jest różny od poprzednich, a rozumowanie wydaje się poprawne.



Ryc. 3. Ilustracja zadania III

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Grużewski 1966]

III. Próba trzecia (ryc. 3). Zdarzenie elementarne to wybór dowolnego punktu wewnątrz naszego okręgu, czyli punktu „dużego" koła. Zdarzenie sprzyjające (sukces) zajdzie wtedy, gdy wybrany losowo punkt znajdzie się wewnątrz koła („małego") wpisanego w rozważany trójkąt równoboczny. Kiedy tak się stanie, to dowolny pęk prostych przechodzących przez nasz wybrany punkt tworzy nieskończenie wiele cięciw spełniających warunek $C > a$. Stosunek promienia dużego koła do małego wynosi 2:1. Zatem zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega = [0, 1]$. Zdarzenie sprzyjające to $A = [0, 1/4]$, bo pole „małego" koła wynosi $\pi \cdot (R/2)^2 = 1/4 \cdot \pi R^2$, czyli 1/4 pola „dużego" koła. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi 1/4.

Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że losowo zadana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg wynosi 1/4.

3. Paradoks

Paradoks? Jedno zadanie, trzy (może więcej?) różne, sprzeczne, wykluczające się wyniki?! Zaprezentowane zagadnienia roztrząsał francuski matematyk Joseph Louis François Bertrand w roku 1888, a może i wcześniej. Był bliski sformułowania nowej, odmiennej od klasycznej, teorii prawdopodobieństwa; gdyż jest to znakomity przykład, gdzie ilość zdarzeń sprzyjających jak i możliwych jest nieskończenie wielka, a nie (klasycznie) określona jakąś skończoną liczbą naturalną. Później na bazie jego dorobku pracował m.in. Pafnucy Czebyszew (1821–1894).

Kiedy spotykamy tego rodzaju łamigłówki, zastanawiamy się, gdzie tkwi pułapka, bo intuicyjnie jesteśmy przekonani, że gdzieś tkwi, że jednak nasz umysł jest spójny pomimo „dowodu”..., że nie jest.

Matematyk zagadnienie wyjaśniłby tak. Trzy przedstawione zadania nie są jednym i tym samym. Rzecz ma się względnie, zależy od przyjętego universum[3], czyli Ω, kluczowy wpływ na obliczane prawdopodobieństwa ma wybór Ω – tj. sposób doboru zbioru zdarzeń elementarnych. Kolejnym istotnym aspektem jest sposób zadawania cięciw, zmienia on istotnie treść zadania. Co to znaczy losowo poprowadzić cięciwę? W trakcie rozważań dopowiedziano (nieco podstępnie) warunki definiowania cięciw według własnego uznania, dla każdego z przypadków inaczej. „Podstęp” leży bowiem w sposobach losowania położenia cięciw, które nie są wzajemnie równoznaczne przy trzech (czterech) różnych definicjach zbioru zdarzeń elementarnych. Po s a m o w o l n y m przyjęciu założeń dalej rozumowaliśmy prawidłowo. Ale prawidłowe sformułowanie zadania we fragmencie odnoszącym się do cięciwy koła powinno brzmieć: „...skonstruowano losowo cięciwę C w sposób...”. Jest to zatem dodanie do klasycznej definicji prawdopodobieństwa funkcji-uzupełnienia dla zbiorów nieskończonych, która w jednoznaczny sposób określi sposób losowania elementów z tego zbioru. Losowo to nie dowolnie!

Istotnym spostrzeżeniem jest również fakt, że operując na zbiorach nieskończonych, nie możemy stosować klasycznej definicji prawdopodobieństwa, rozumianej jako liczba zdarzeń sprzyjających $|A|$ do liczby wszystkich (policzalnych) zdarzeń elementarnych $|\Omega|$. Zastosowanie tej definicji na takie ciągłości jak współrzędne biegunowe (miary kątów), długości odcinków czy też pola powierzchni figur prowadzi do sprzecznych wyników.

Okazuje się, że nie „wszystkie drogi prowadzą do Rzymu”. W powyższym przypadku dedukcja formalnie poprawna okazała się niewystarczająca, zadanie musi być sformułowane nie tylko na poziomie warunków brzegowych zagadnienia, ale i na poziomie warunków brzegowych rozwiązania. Rozwiązanie zagadnienia nie może być tutaj tylko wynikiem toku dedukcyjnego, przyjmując jakąś nieznaną nam wcześniej jednoznaczną postać – musimy je wcześniej ograniczyć *a priori* do konkretnych przypadków, nie zaś oczekiwać, że wyłoni się samo, automatycznie, jak z treści szkolnego zadania.

Pewną analogią jest tzw. analiza starożytnych w zakresie rozwiązywania równań algebraicznych, z tym że otrzymywane rozwiązania są sprawdzalne i można odrzucić nieprawidłowe. W analizowanym przypadku nie ma takiej możliwości – rozwiązania są pozornie sprzeczne, ale wszystkie prawidłowe.

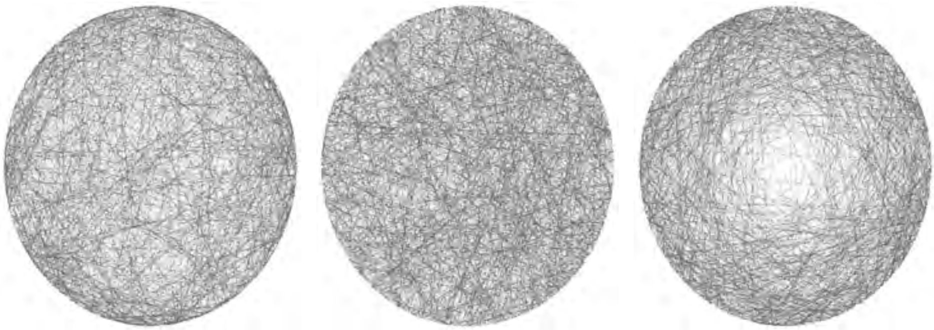
Zniecierpliwieni zapewne orzekną, że dywagacje zaczynają być jałowe – ile „w końcu” wynosi owo prawdopodobieństwo?! Jakie płyną utylitarne wnioski z naszego roztrząsania sprawy? Chcemy, podobnie jak nałogowy hazardzista kawaler de Méré i nieco mniej nałogowy hazardzista Pascal (Francja, wiek XVII), wiedzieć, jak obstawić u krupiera zakład w grze o wysoką stawkę. Nasze kasyno jest oparte na trójkąciku, patyczku i kółeczku. Empirycznie

[3] Po łacinie znaczy: zupełność, ogół.

możemy rzucać patyczkiem na rysunek, wykonywać pomiary i dowiedzieć się, ile wynosi szacunkowe prawdopodobieństwo, tak jak w nieco innym zagadnieniu George Buffon w 1777 roku obliczył wartość liczby π.

Problem jednak tkwi w zaprojektowaniu eksperymentu (podejmowano nawet próby symulacji z zastosowaniem cząsteczek gazów), symulacja (jednoznaczna i powtarzalna) każdej z sytuacji wydaje się trudna. Najbardziej zbliżonym do eksperymentu fizycznego, a nie myślowego, wydaje się przypadek ostatni (P=1/4), łatwo jest empirycznie rozpoznać, czy cięciwa (rzucony pręt) przechodzi przez jakikolwiek punkt koła wpisanego w trójkąt, czy też nie. Organizując tego typu grę na podwórku albo w kasynie, przyjęcie takiego modelu byłoby dla graczy komunikatywne.

Ciekawe wyniki dają symulacje komputerowe metodami typu Monte Carlo. Zadając 3 różne warunki układania cięciw uzyskuje się 3 różne wyniki w postaci trzech różnych obrazów graficznych, powstających np. po pseudolosowaniu 500 cięciw w określonym polu. Są to ilustracje brzegowych warunków losowania, nie wyników.



***P* = 1/3** **P = 1/2** **P = 1/4**

Ryc. 4. Symulacja przypadków

Źródło: opracowanie własne na podstawie [http://bayes.wustl.edu]

Napisanie tego rodzaju programu w większości języków programowania (choćby w poczciwym Turbo Pascalu) nie powinno sprawić większego problemu – zachęcam, można wtedy „eksperymentować” do woli. Jednak pamiętajmy, że maszyna cyfrowa operuje skończonymi wartościami, a jej kwantem geometrii jest piksel. Maszyna to artefakt – nie przyroda, utopijny świat płyty głównej naszego „peceta” zapewne problem przyjmie i zniesie, ale niestety niewiele wniesie.

Podsumowując, należy zmartwić hazardzistów – podpowiedzi brak!

4. Finał

Zachodzi pytanie metodologiczne, czy aby nasze „paradoksy" nie wynikają z przyjętego aksjomatycznie abstraktu figur geometrycznych. Jak daleko można budować abstrakcję, „wymyślać" problemy? Wielki Bertrand Russell (patrz: antynomia Russella albo paradoks zbioru wszystkich zbiorów Cantora) pokazał, że nie każda zbudowana formalnie poprawnie abstrakcja jest dopuszczalna – otóż, abstrakty mają swoje granice! Nasz problem okazał się raczej tymczasowym stanem niewiedzy, nieprawidłowym zdefiniowaniem warunków brzegowych, pomieszaniem pojęć. Na bazie języka matematyki, która stworzyła owo zagadnienie, można je objaśnić teorią prawdopodobieństwa w zbiorach nieskończonych, przyjmując aksjomatyczną definicję Kołmogorowa; chociaż fizyk powie nieco ironicznie, że to jest *idem per idem*[4]. Celem wyjaśnienia wymyślonego abstraktu posłużymy się kolejnym abstraktem.

Matematyka poszła w kierunku rozwoju pojęć nieskończoności i ciągłości. Takie pojęcia jak ciąg i granica to wynik tej drogi. Historycznie najpierw powstawały teorie nieskończenie małych liczb (twórca pochodnej Leibniz właśnie tym pojęciem się posługiwał). Teoria nieskończenie małych (i dużych) jest na nowo rozwinięta przez wspaniałego matematyka (urodzonego zresztą w Wałbrzychu) Abrahama Robinsona. Zasadniczo teoria ta lepiej tłumaczy świat, bo w świecie nic nie wskazuje na istnienie nieskończenie wielkich i ciągłych, za to bardzo małe, ale chyba skończone występują licznie.

Wróćmy jeszcze do empirii tarczy na strzelnicy. Fizyk powie tak, nawet jeżeli obszar trafienia grotu będzie bardzo mały, np. 1 *Å*, to jednak skończenie mały. Równocześnie położenia naszych trafiających grotów lotek nie są ciągłe, są skwantowane, jeżeli ten kwant położenia będzie miał średnicę grotu – paradoksy znikają, lotka trafia tylko w matrycę wyznaczonych miejsc, to fizyka ciała stałego – krystalografia. Nie ma tu żadnych nieskończonych mnogości ani ciągłości, lecz jedynie zmiana skali na mikro.

Determinizm!? Tak, ale nie do ogarnięcia, bo skończenie małe są naprawdę małe i jest ich dużo, a aktualnie najlepsze maszyny cybernetyczne potrafią efektywnie operować algorytmem z kilkunastoma dynamicznie zależnymi od siebie zmiennymi. Analitycznie, na kartce papieru, mamy już problemy z dokładnym rozwiązaniem klasycznego zagadnienia mechaniki nieba – trzech, czterech grawitujących ciał. Czyli jednak probabilistyko ratuj!

Fizyk podziękuje zatem matematykowi za teorię mnogości jak i statystykę z zastrzeżeniem, że to tylko modele, które owszem – pomagają. Współczesna probabilistyka pozwala zamodelować niezwykle skutecznie wiele procesów zachodzących w Kosmosie i w artefaktach. Jednak matematyka jest układem zastępczym, który pozwala rzeczywistość symulować, ale nie powinniśmy wniosków z tej symulacji k a t e g o r y c z n i e odnosić do przyrody, gdyż można dokonać i n t e r w e n c j i w rzeczywistość, a potem kłócić się jak pewien kardynał z Galileuszem (spierano się o kratery na Księżycu). Ów kardynał rzekł: Po cóż mam patrzeć

4 Znaczy: to samo przez to samo.

w teleskop, skoro, stosując zasady logiki Arystotelesa, dowiedziono, że Księżyc i planety są idealnie gładkimi kulami („kryształowymi") i być inaczej nie może, bo nasz aparat wnioskujący jest nieomylny (a trzeba pamiętać, że ów kardynał był naprawdę biegły w logice!)? Aparat może i tak, ale dane wejściowe na pewno nie. Matematyka nie jest nauką absolutną, jest tylko modelowaniem świata, a nie jego zasadą. Doszliśmy do starego pytania, czy matematyka jest, czy my ją wymyślamy, powiedzmy tak – czy $e^{\pi i}+1 = 0$ także w Galaktyce Andromedy? Nie wiem.

***

Na koniec do przemyślenia, „trzy grosze" od fizyka. Nieskończoność raczej nie istnieje, bo skoro nukleonów we Wszechświecie jest 10^{80} (albo inaczej mówiąc, masa Wszechświata jest skończona) to nie można napisać nieskończenie długiej książki (tym samym liczby), gdyż przetwarzając całą materię Kosmosu (w tym siebie samego) na pióro, inkaust i pergamin, w końcu... będziemy musieli postawić ostatnią kropkę.

Literatura

Bronsztejn I.N., Siemiediajew K.A., *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 1988.

Grużewski A., *O prawdopodobieństwie i statystyce,* PZWS, Warszawa 1966.

Rasiowa H., *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa 1973.

Słownik wyrazów obcych, PWN, Warszawa 1980.

Stankiewicz J., Wilczek K., *Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2000.

ABSTRACT

The Joseph Bertrand's paradox

The publication relates to the not very well-known „paradox", described by Joseph Bertrand – the French mathematician. The subject matter of the article oscillates around probabilistic. This part of mathematics is infrequently popular by students, but is close the nature of our world – more than (for example) analytic geometry. The popular character of the article is devoid "hard formulas" and concentrated on the „sense of this all". Many questions connected with the theory of the science, and also with the place of mathematics as human scientific thinking process.

Key words: popular the science, chance variation, geometrical probability, the philosophy of the nature, mathematical paradox.